Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2022/23

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(7) Ungleichungen und Grenzwerte

Wahrscheinlichkeitsungleichungen

Erwartungswertungleichungen

Gesetze der Großen Zahl

Zentrale Grenzwertsätze

Selbstkontrollfragen

Wahrscheinlichkeitsungleichungen

Erwartungswertungleichungen

Gesetze der Großen Zahl

Zentrale Grenzwertsätze

Selbstkontrollfragen

Theorem (Markov Ungleichung)

ξ sei eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P}(\xi \geq 0) = 1$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\mathbb{P}(\xi \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}(\xi)}{x}. \tag{1}$$

Bemerkungen

- Weil $\mathbb{P}(\xi \geq 0) = 1$ gilt, sagt man auch, dass ξ eine *nicht-negative* Zufallvariable ist.
- Die Ungleichung setzt Überschreitungswahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte in Bezug.
- Gilt z.B. für eine nichtnegative Zufallsvariable ξ, dass $\mathbb{E}(\xi) = 1$, dann ist $\mathbb{P}(\xi \geq 100) \leq 0.01$.

Beweis

Wir betrachten den Fall einer kontinuierlichen Zufallsvariable ξ mit WDF p. Wir halten zunächst fest, dass

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} s\, p(s)\, ds = \int_{0}^{\infty} s\, p(s)\, ds = \int_{0}^{x} s\, p(s)\, ds + \int_{x}^{\infty} s\, p(s)\, ds, \qquad (2)$$

weil ξ nicht-negativ ist. Es folgt dann

$$\mathbb{E}(\xi) \geq \int_{x}^{\infty} s\, p(s)\, ds \geq \int_{x}^{\infty} x\, p(s)\, ds = x \int_{x}^{\infty} p(s)\, ds = x\, \mathbb{P}(\xi \geq x). \qquad (3)$$

Dabei gilt die erste Ungleichung weil

$$\int_{0}^{x} s\, p(s)\, ds \geq 0 \qquad (4)$$

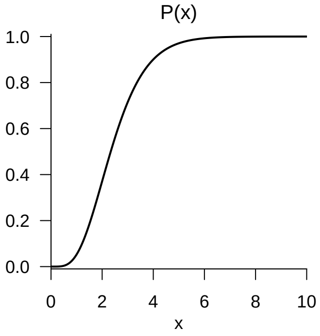
und die zweite Ungleichung gilt, weil $x \leq \xi$ für $\xi \in [x, \infty[$. Es folgt also, dass

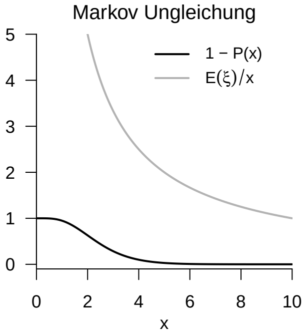
$$\mathbb{E}(\xi) \geq x\, \mathbb{P}(\xi \geq x) \Leftrightarrow \mathbb{P}(\xi \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}(\xi)}{x}. \qquad (5)$$

$\square$

Beispiel ($\xi \sim G(\alpha, \beta)$)

- Wir halten ohne Beweis fest, dass für $\xi \sim G(\alpha, \beta)$ gilt, dass $\mathbb{E}(\xi) = \alpha\beta$.
- Wir betrachten den Fall $\alpha := 5, \beta := 2$, so dass $G(x; 5, 2) = \chi^2(10)$





Theorem (Chebyshev Ungleichung)

Es sei ξ eine Zufallsvariable mit Varianz $\mathbb{V}(\xi)$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}(\xi)| \geq x) \leq \frac{\mathbb{V}(\xi)}{x^2}. \tag{6}$$

Bemerkungen

- Die Chebyshev Ungleichung setzt Abweichungen vom Erwartungswert in Bezug zur Varianz.
- Zum Beispiel gilt

$$\mathbb{P}\left(|\xi - \mathbb{E}(\xi)| \geq 3\sqrt{\mathbb{V}(\xi)}\right) \leq \frac{\mathbb{V}(\xi)}{\left(3\sqrt{\mathbb{V}(\xi)}\right)^2} = \frac{1}{9}. \tag{7}$$

Beweis

Wir halten zunächst fest, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt, dass aus $a^2 \geq b^2$ folgt, dass $|a| \geq b$. Dazu betrachten wir die folgenden vier möglichen Fälle.

(1) $a^2 \geq b^2$ für $a \geq 0$ und $b \geq 0$. Dann gilt

$$a^2 \geq b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} \geq \sqrt{b^2} \Rightarrow a \geq b \Rightarrow |a| \geq b. \tag{8}$$

(2) $a^2 \geq b^2$ für $a \leq 0$ und $b \geq 0$. Dann gilt

$$a^2 \geq b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} \geq \sqrt{b^2} \Rightarrow -a \geq b \Rightarrow |a| \geq b. \tag{9}$$

(3) $a^2 \geq b^2$ für $a \geq 0$ und $b \leq 0$. Dann gilt

$$a^2 \geq b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} \geq \sqrt{b^2} \Rightarrow a \geq -b \geq b \Rightarrow |a| \geq b. \tag{10}$$

(4) $a^2 \geq b^2$ für $a \leq 0$ und $b \leq 0$. Dann gilt

$$a^2 \geq b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} \geq \sqrt{b^2} \Rightarrow -a \geq -b \geq b \Rightarrow |a| \geq b. \tag{11}$$

Als nächstes definieren wir $\upsilon := (\xi - \mathbb{E}(\xi))^2$. Dann folgt aus der Markov Ungleichung

$$\mathbb{P}\left(\upsilon \geq x^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}(\upsilon)}{x^2} \Leftrightarrow \mathbb{P}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2 \geq x^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2\right)}{x^2} \Leftrightarrow \mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}(\xi)| \geq x) \leq \frac{\mathbb{V}(\xi)}{x^2}. \tag{12}$$

$\square$

Wahrscheinlichkeitsungleichungen

Erwartungswertungleichungen

Gesetze der Großen Zahl

Zentrale Grenzwertsätze

Selbstkontrollfragen

Theorem (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

ξ und υ seien zwei Zufallsvariablen und $\mathbb{E}(\xi\upsilon)$ sei endlich. Dann gilt

$$\mathbb{E}(\xi\upsilon)^2 \le \mathbb{E}\left(\xi^2\right)\mathbb{E}\left(\upsilon^2\right). \tag{13}$$

Bemerkungen

- Analog gilt für Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$, dass $\langle x, y\rangle^2 \le \|x\| \cdot \|y\|$.
- Die Korrelationsungleichung ist eine direkte Konsequenz der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.
- Für einen Beweis verweisen wir auf DeGroot and Schervish (2012), Theorem 4.6.2.

Theorem (Korrelationsungleichung)

ξ und υ seien Zufallsvariablen mit $\mathbb{V}(\xi), \mathbb{V}(\upsilon) > 0$. Dann gelten

$$\frac{\mathbb{C}(\xi,\upsilon)^2}{\mathbb{V}(\xi)\mathbb{V}(\upsilon)} \le 1 \text{ und } -1 \le \rho(\xi,\upsilon) \le 1. \tag{14}$$

Bemerkung

- Korrelationen nehmen also immer Werte im Intervall $[-1, 1]$ an.

Erwartungswertungleichungen

Beweis

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für zwei Zufallsvariablen α und β gilt, dass

$$\mathbb{E}(\alpha\beta)^2 \le \mathbb{E}\left(\alpha^2\right)\mathbb{E}\left(\beta^2\right). \tag{15}$$

Wir definieren nun $\alpha := \xi - \mathbb{E}(\xi)$ und $\beta := \upsilon - \mathbb{E}(\upsilon)$. Dann besagt die Cauchy-Schwarz Ungleichung gerade, dass

$$\mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))(\upsilon - \mathbb{E}(\upsilon))\right)^2 \le \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2\right)\mathbb{E}\left((\upsilon - \mathbb{E}(\upsilon))^2\right). \tag{16}$$

Also gilt

$$\mathbb{C}(\xi,\upsilon)^2 \le \mathbb{V}(\xi)\mathbb{V}(\upsilon) \Leftrightarrow \frac{\mathbb{C}(\xi,\upsilon)^2}{\mathbb{V}(\xi)\mathbb{V}(\upsilon)} \le 1. \tag{17}$$

Weiterhin folgt aus der Definition der Korrelation dann sofort, dass auch

$$\rho(\xi,\upsilon)^2 \le 1. \tag{18}$$

Dann gilt aber auch

$$|\rho(\xi,\upsilon)^2| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \rho(\xi,\upsilon) \le 1, \tag{19}$$

denn

$$\rho(\xi,\upsilon)^2 \le 1 \Rightarrow \sqrt{\rho(\xi,\upsilon)^2} \le \sqrt{1} \Rightarrow \quad \rho(\xi,\upsilon) \le 1 \Rightarrow |\rho(\xi,\upsilon)| \le 1 \text{ für } \rho(\xi,\upsilon) \ge 0 \tag{20}$$

und

$$\rho(\xi,\upsilon)^2 \le 1 \Rightarrow \sqrt{\rho(\xi,\upsilon)^2} \le \sqrt{1} \Rightarrow -\rho(\xi,\upsilon) \le 1 \Rightarrow |\rho(\xi,\upsilon)| \le 1 \text{ für } \rho(\xi,\upsilon) \le 0 \tag{21}$$

$\square$

Theorem (Jensensche Ungleichung)

ξ sei eine Zufallsvariable und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, d.h.

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2) \tag{22}$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \lambda \in [0,1]$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(g(\xi)) \ge g(\mathbb{E}(\xi)). \tag{23}$$

Analog sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konkave Funktion, d.h.

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2) \tag{24}$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \lambda \in [0,1]$. Dann gilt

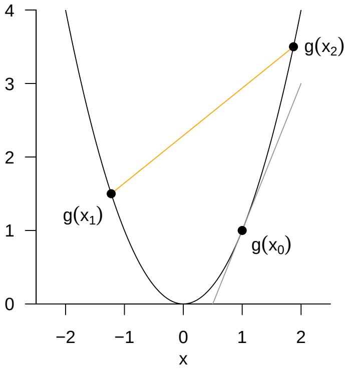
$$\mathbb{E}(g(\xi)) \le g(\mathbb{E}(\xi)). \tag{25}$$

Bemerkungen

- Bei konvexem g liegt der Funktionsgraph unter der Geraden von $g(x_1)$ zu $g(x_2)$.
- Bei konkavem g liegt der Funktionsgraph über der Geraden von $g(x_1)$ zu $g(x_2)$.
- Der Logarithmus ist eine konkave Funktion, also gilt $\mathbb{E}(\ln \xi) \le \ln \mathbb{E}(\xi)$.

Visualisierung einer konvexen Funktion

— $g(x) := x^2$



— $\lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2)$ für $x_1 := -\sqrt{1.5}, x_2 := \sqrt{3.5}, \lambda \in [0,1]$

— $t(x) := g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$ für $x_0 := 1$

Beweis

Es sei g eine konvexe Funktion. Dann gilt für die Tangente t von g in $x_0 \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$g(x) \geq t(x) := g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) \tag{26}$$

Wir setzen nun $x := \xi$ und $x_0 := \mathbb{E}(\xi)$. Dann gilt mit obiger Ungleichung, dass

$$g(\xi) \geq g(\mathbb{E}(\xi)) + g'(\mathbb{E}(\xi))(\xi - \mathbb{E}(\xi)) \tag{27}$$

Erwartungswertbildung ergibt dann

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(g(\xi)) \geq \mathbb{E}(g(\mathbb{E}(\xi))) + \mathbb{E}(g'(\mathbb{E}(\xi))(\xi - \mathbb{E}(\xi))) \\
\Leftrightarrow\ &\mathbb{E}(g(\xi)) \geq g(\mathbb{E}(\xi)) + g'(\mathbb{E}(\xi))\mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))) \\
\Leftrightarrow\ &\mathbb{E}(g(\xi)) \geq g(\mathbb{E}(\xi)) + g'(\mathbb{E}(\xi))(\mathbb{E}(\xi) - \mathbb{E}(\xi)) \\
\Leftrightarrow\ &\mathbb{E}(g(\xi)) \geq g(\mathbb{E}(\xi)).
\end{aligned} \tag{28}$$

Sei nun g eine konkave Funktion. Dann ist $-g$ eine konvexe Funktion. Mit der Jensenschen Ungleichung für konvexe Funktionen folgt dann die Jensensche Ungleichung für konkave Funktionen aus

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(-g(\xi)) \geq -g(\mathbb{E}(\xi)) \\
\Leftrightarrow\ &-\mathbb{E}(g(\xi)) \geq -g(\mathbb{E}(\xi)) \\
\Leftrightarrow\ &\mathbb{E}(g(\xi)) \leq g(\mathbb{E}(\xi)).
\end{aligned} \tag{29}$$

$\square$

Wahrscheinlichkeitsungleichungen

Erwartungswertungleichungen

Gesetze der Großen Zahl

Zentrale Grenzwertsätze

Selbstkontrollfragen

Überblick

- Es gibt ein *Schwaches Gesetz der Großen Zahl* und ein *Starkes Gesetz der Großen Zahl*.
- Intuitiv besagen beide Gesetze, dass sich das Stichprobenmittel von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen für eine große Anzahl an Zufallsvariablen dem Erwartungswert der zugrundeliegenden Verteilung nähert.
- Das Schwache und das Starke Gesetz der Großen Zahl unterscheiden sich in Hinblick auf die zu ihrer Formulierung benutzen Formen der *Konvergenz von Zufallsvariablen*.
  - Das Schwache Gesetz basiert auf der *Konvergenz in Wahrscheinlichkeit*.
  - Das Starke Gesetz basiert auf der *fast sicheren Konvergenz*.
- Wir begnügen uns mit Konvergenz in Wahrscheinlichkeit und dem Schwachen Gesetz.

Definition (Konvergenz in Wahrscheinlichkeit)

Eine Folge von Zufallsvariable $\xi_1, \xi_2, ...$ *konvergiert gegen eine Zufallsvariable* ξ *in Wahrscheinlichkeit*, wenn für jedes noch so kleine $\epsilon > 0$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\xi_n - \xi| < \epsilon) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geq \epsilon) = 0 \tag{30}$$

Die Konvergenz von $\xi_1, \xi_2, ...$ gegen ξ in Wahrscheinlichkeit wird geschrieben als

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{P}} \xi \tag{31}$$

Bemerkungen

- $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{P}} \xi$ heißt, dass sich die Wahrscheinlichkeit, dass ξ_n in dem zufälligen Intervall
$$]\xi - \epsilon, \xi + \epsilon[\tag{32}$$
liegt, unabhängig davon, wie klein dieses Intervall sein mag, 1 nähert, wenn n gegen Unendlich strebt.
- Intuitiv heißt das, dass sich für eine konstante Zufallsvariable $\xi := a$ die Verteilung von ξ_n mehr und mehr um a konzentriert, wenn n gegen Unendlich strebt.

Theorem (Schwaches Gesetz der Großen Zahl)

$\xi_1, ..., \xi_n$ seien unabhängig und gleichverteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(\xi_i) = \mu$ für alle $i = 1, ..., n$. Weiterhin bezeichne

$$\bar{\xi}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \tag{33}$$

das Stichprobenmittel der $\xi_i, i = 1, ..., n$. Dann konvergiert $\bar{\xi}_n$ in Wahrscheinlichkeit gegen μ,

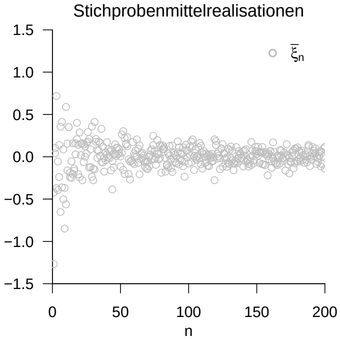
$$\bar{\xi}_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathrm{P}} \mu. \tag{34}$$

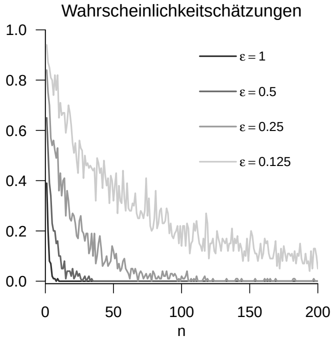
Bemerkungen

- Für einen Beweis siehe zum Beispiel Georgii (2009), Abschnitt 5.1.
- $\bar{\xi}_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathrm{P}} \mu$ heißt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Stichprobenmittel nahe dem Erwartungswert der zugrundeliegenden Verteilung liegt, sich 1 nähert, wenn $n \to \infty$.

Beispiel $(\xi_1, ..., \xi_n \sim N(0,1))$

- Die linke Abbildung zeigt Realisationen von $\bar{\xi}_n$ als Funktion von n.
- Die rechte Abbildung zeigt Schätzungen von $\mathbb{P}(|\bar{\xi}_n - \mu| \geq \epsilon)$ als Funktionen von n und ϵ.





Wahrscheinlichkeitsungleichungen

Erwartungswertungleichungen

Gesetze der Großen Zahl

Zentrale Grenzwertsätze

Selbstkontrollfragen

Zentrale Grenzwertsätze

Überblick

- Die Zentralen Grenzwertsätze besagen, dass die Summe von unabhängigen Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 asymptotisch, d.h. für unendlich viele Zufallsvariablen, normalverteilt mit Erwartungswertparameter 0 ist.
- Modelliert man eine Messgröße y also als Summe eines deterministischen Einflusses μ und der Summe

$$\varepsilon := \sum_{i=1}^{n} \xi_i \tag{35}$$

  einer Vielzahl von unabhängigen Zufallsvariablen $\xi_i, i = 1, ..., n$, welche unbekannte Störeinflüsse beschreiben, so ist für großes n die Annahme

$$y = \mu + \varepsilon \text{ mit } \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \tag{36}$$

  also mathematisch gerechtfertigt. Wie wir später sehen werden, liegt die Annahme in Gleichung (36) vielen statischen Modellen zugrunde.
- In der "Lindenberg und Lévy" Form des Zentralen Grenzwertsatzes werden unabhängig und identische Zufallsvariablen vorausgesetzt. In der "Liapunov" Form werden nur unabhängige Zufallsvariablen voraussetzt. Der Beweis der "Lindenberg und Lévy" Form ist einfacher als der Beweis der "Liapunov" Form. Wir verzichten hier aber auf die Angabe von Beweisen.
- In beiden Formulierungen des Zentralen Grenzwertsatzes ist die betrachtete Konvergenz von Zufallsvariablen die *Konvergenz in Verteilung*, welche wir zunächst einführen.
- Zur mathematik-geschichtlichen Genese der Zentralen Grenzwertsätze siehe z.B. Fischer (2011).

Definition (Konvergenz in Verteilung)

Eine Folge $\xi_1, \xi_2, \ldots$ von Zufallsvariablen *konvergiert in Verteilung gegen eine Zufallsvariable* ξ, wenn

$$\lim_{n \to \infty} P_{\xi_n}(x) = P_{\xi}(x). \tag{37}$$

für alle ξ an denen P_ξ stetig ist. Die Konvergenz in Verteilung von $\xi_1, \xi_2, \ldots$ gegen ξ wird geschrieben als

$$\xi_n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{D}} \xi, \tag{38}$$

Gilt $\xi_n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{D}} \xi$, dann heißt die Verteilung von ξ die *asymptotische Verteilung der Folge* $\xi_1, \xi_2, \ldots$.

Bemerkungen

- $\xi \xrightarrow[n \to \infty]{\text{D}} \xi$ ist eine Aussage über die Konvergenz von KVFs.
- Konvergenz in Wahrscheinlichkeit impliziert Konvergenz in Verteilung.

Theorem (Zentraler Grenzwertsatz nach Lindenberg und Lévy)

$\xi_1, ..., \xi_n$ seien unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{E}(\xi_i) := \mu \text{ und } \mathbb{V}(\xi_i) := \sigma^2 > 0 \text{ für alle } i = 1, ..., n. \tag{39}$$

Weiterhin sei ζ_n die Zufallsvariable definiert als

$$\zeta_n := \sqrt{n}\left(\frac{\bar{\xi}_n - \mu}{\sigma}\right). \tag{40}$$

Dann gilt für alle $z \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} P_{\zeta_n}(z) = \Phi(z), \tag{41}$$

wobei Φ die kumulative Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Bemerkung

- Wir zeigen später, dass damit für $n \to \infty$ asymptotisch auch gilt, dass

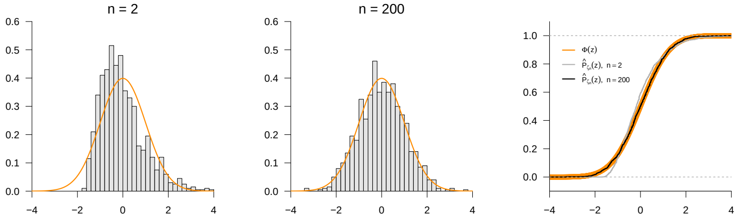
$$\sum_{i=1}^n \xi_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) \text{ und } \bar{\xi}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right). \tag{42}$$

Beispiel $(\xi_1, ..., \xi_n \sim \chi^2(k))$

- Wir halten ohne Beweis fest, dass $\mathbb{E}(\xi_i) = k$ und $\mathbb{V}(\xi_i) = 2k$.
- Wir betrachten das Szenario $\xi_i \sim \chi(3)$ für $i = 1, ..., n$.
- Die linken Abbildungen zeigen Histogrammschätzer der Wahrscheinlichkeitsdichte von

$$\zeta_n := \sqrt{n}\left(\frac{\bar{\xi}_n - \mu}{\sigma}\right) \tag{43}$$

  basierend auf 1000 Realisationen von ζ_n für $n = 2$ und $n = 200$, sowie die WDF von $N(0, 1)$.
- Die rechte Abbildung zeigt die entsprechenden (empirischen) kumulativen Verteilungsfunktionen.



Theorem (Zentraler Grenzwertsatz nach Liapounov)

$\xi_1, ..., \xi_n$ seien unabhängige aber nicht notwendigerweise identisch verteilten Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{E}(\xi_i) := \mu_i \text{ und } \mathbb{V}(\xi_i) := \sigma_i^2 > 0 \text{ für alle } i = 1, ..., n. \quad (44)$$

Weiterhin sollen für $\xi_1, ..., \xi_n$ folgende Eigenschaften gelten:

$$\mathbb{E}(|\xi_i - \mu_i|^3) < \infty \text{ und } \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(|\xi_i - \mu_i|^3\right)}{(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2)^{3/2}} = 0. \quad (45)$$

Dann gilt für die Zufallsvariable ζ_n definiert als

$$\zeta_n := \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}}, \quad (46)$$

für alle $z \in \mathbb{R}$, dass

$$\lim_{n\to\infty} P_{\zeta_n}(z) = \Phi(z), \quad (47)$$

wobei Φ KVF der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Bemerkungen

- Wir zeigen später, dass dann auch gilt, dass $\sum_{i=1}^n \xi_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$.

Wahrscheinlichkeitsungleichungen

Erwartungswertungleichungen

Gesetze der Großen Zahl

Zentrale Grenzwertsätze

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie die Markov Ungleichung wieder.
2. Geben Sie die Chebyshev Ungleichung wieder.
3. Geben Sie die Cauchy-Schwarz Ungleichung wieder.
4. Geben Sie die Korrelationsungleichung wieder.
5. Definieren Sie den Begriff der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.
6. Definieren Sie den Begriff der Konvergenz in Verteilung.
7. Geben Sie das Schwache Gesetz der Großen Zahl wieder.
8. Erläutern Sie den Zentralen Grenzwertsatz nach Lindenberg und Lévy.
9. Erläutern Sie den Zentralen Grenzwertsatz nach Liapunov.
10. Warum sind die Zentralen Grenzwertsätze für die statistische Modellbildung wichtig?

References

DeGroot, Morris H., and Mark J. Schervish. 2012. *Probability and Statistics*. 4th ed. Boston: Addison-Wesley.

Fischer, Hans. 2011. *A History of the Central Limit Theorem*. New York, NY: Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-0-387-87857-7.

Georgii, Hans-Otto. 2009. *Stochastik: Einführung in Die Wahrscheinlichkeitstheorie Und Statistik*. 4., überarb. und erw. Aufl. De-Gruyter-Lehrbuch. Berlin: de Gruyter.