



Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2022/23

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(5) Multivariate Verteilungen

Repräsentation zentraler Eigenschaften

Modellierung

Modell

Realität

Wahrscheinlichkeitstheorie

Probabilistisches Modell

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$\mathbb{P}_\xi(S) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(S))$$

Zufallsvorgänge

Phänomene, die von Menschen
nicht mit absoluter Sicherheit
vorhergesagt werden können.

Deine Psychotherapie

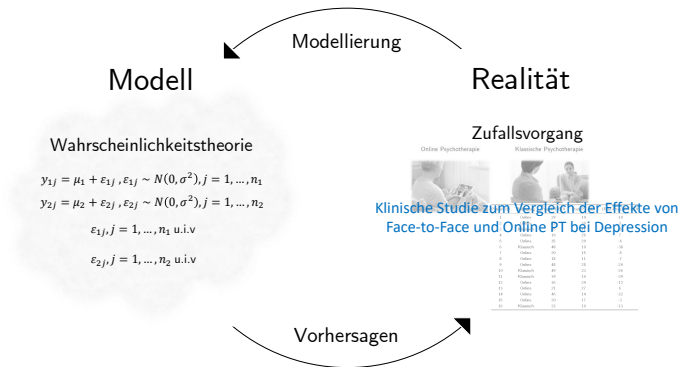
Klassische Psychotherapie



Vorhersagen

Quantifizierung von Unsicherheit

Wir nehmen an, dass die BDI Score Erwartungswertabweichungen der Proband:innen Realisierungen **unabhängiger und identisch (u.i.v.)** normalverteilter Zufallsvariablen sind.



Definition

Multivariate Verteilungen

Marginalverteilungen

Bedingte Verteilungen

Unabhängige Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

Definition

Multivariate Verteilungen

Marginalverteilungen

Bedingte Verteilungen

Unabhängige Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

Definition (Zufallsvektor)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ sei ein n -dimensionaler Messraum. Ein n -dimensionaler *Zufallsvektor* ist definiert als eine Abbildung

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathcal{X}, \omega \mapsto \xi(\omega) := \begin{pmatrix} \xi_1(\omega) \\ \vdots \\ \xi_n(\omega) \end{pmatrix} \quad (1)$$

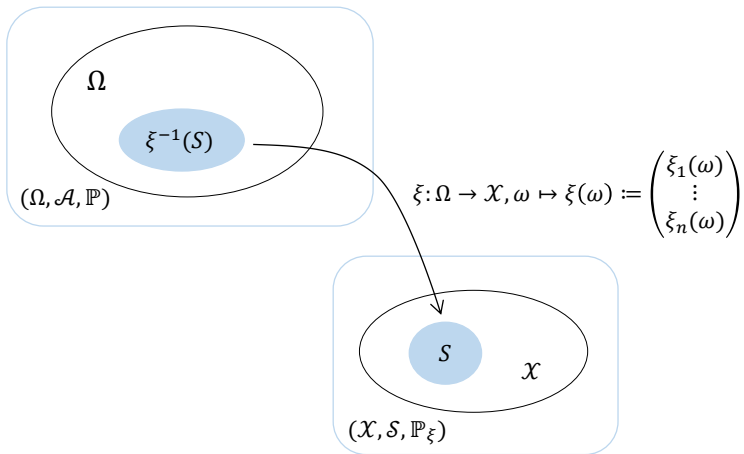
mit der *Messbarkeitseigenschaft*

$$\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in S\} \in \mathcal{A} \text{ f\"ur alle } S \in \mathcal{S}. \quad (2)$$

Bemerkungen

- ξ ist hier eine univariate, vektorwertige Abbildung.
- Das Standardbeispiel f\"ur $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ ist $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.
- Wir verzichten auf eine explizite Einf\"uhrung n -dimensionaler σ -Algebren wie $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
- Ohne Beweis halten wir fest, dass ξ messbar ist, wenn die Funktionen ξ_1, \dots, ξ_n messbar sind.
- Die Komponentenfunktionen eines Zufallsvektors sind Zufallsvariablen.
- Ein n -dimensionaler Zufallsvektor ist die Konkatenation von n Zufallsvariablen.
- F\"ur $n := 1$ ist ein Zufallsvektor eine Zufallsvariable.
- F\"ur einen Zufallsvektor schreiben wir auch h\"aufig $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Definition



$$\mathbb{P}(\xi^{-1}(S)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in S\}) =: \mathbb{P}_\xi(S)$$

Definition

Multivariate Verteilungen

Marginalverteilungen

Bedingte Verteilungen

Unabhängige Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

Definition (Multivariate Verteilung)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ sei ein n -dimensionaler Messraum und

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathcal{X}, \omega \mapsto \xi(\omega) \quad (3)$$

sei ein Zufallsvektor. Dann heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}_ξ , definiert durch

$$\mathbb{P}_\xi : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1], S \mapsto \mathbb{P}_\xi(S) := \mathbb{P}(\xi^{-1}(S)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in S\}) \quad (4)$$

die *multivariate Verteilung des Zufallsvektor* ξ .

Bemerkungen

- Der Einfachheit halber spricht man oft auch nur von “der Verteilung des Zufallsvektors ξ ”.
- Die Notationskonventionen für Zufallsvariablen gelten für Zufallsvektoren analog, z.B.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\xi(\xi \in S) &:= \mathbb{P}(\{\xi \in S\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in S\}) \\ \mathbb{P}_\xi(\xi = x) &:= \mathbb{P}(\{\xi = x\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x\}) \\ \mathbb{P}_\xi(\xi \leq x) &:= \mathbb{P}(\{\xi \leq x\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \leq x\}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbb{P}_\xi(x_1 \leq \xi \leq x_2) := \mathbb{P}(\{x_1 \leq \xi \leq x_2\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid x_1 \leq \xi(\omega) \leq x_2\})$$

- Relationsoperatoren wie \leq werden hier *komponentenweise* verstanden.
- Zum Beispiel heißt $x \leq y$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$, dass $x_i \leq y_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Definition (Multivariate kumulative Verteilungsfunktionen)

ξ sei ein Zufallsvektor mit Ergebnisraum \mathcal{X} . Dann heißt eine Funktion der Form

$$P_\xi : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1], x \mapsto P_\xi(x) := \mathbb{P}_\xi(\xi \leq x) \quad (6)$$

multivariate kumulative Verteilungsfunktion von ξ .

Bemerkung

- Multivariate kumulative Verteilungsfunktionen können zur Definition von multivariaten Verteilungen genutzt werden, häufiger ist allerdings die Definition multivariater Verteilungen durch multivariate Wahrscheinlichkeitsmasse- oder Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen.

Definition (Diskreter Zufallsvektor, Multivariate WMF)

ξ sei ein Zufallsvektor mit Ergebnisraum \mathcal{X} . ξ heißt *diskreter Zufallsvektor* wenn der Ergebnisraum \mathcal{X} endlich oder abzählbar ist und eine Funktion

$$p_\xi : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1], x \mapsto p_\xi(x) \quad (7)$$

existiert, für die gilt

- (1) $\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1$ und
- (2) $\mathbb{P}_\xi(\xi = x) = p(x)$ für alle $x \in \mathcal{X}$.

Ein entsprechende Funktion p heißt *multivariate Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion (WMF)* von ξ .

Bemerkungen

- Der Begriff der multivariaten WMF ist analog zum Begriff der WMF.
- Man spricht oft einfach von der WMF eines Zufallsvektors.
- Wie univariate WMFen sind multivariate WMFen nicht-negativ und normiert.

Beispiel (Multivariate Wahrscheinlichkeitsmassefunktion)

Wir betrachten einen zweidimensionalen Zufallsvektor $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ der Werte in $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ annimmt, wobei $\mathcal{X}_1 := \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{X}_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ seien.

Dann entspricht der Ergebnisraum von ξ der in untenstehender Tabelle spezifizierten Menge an Tupeln (x_1, x_2)

(x_1, x_2)	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$
$x_1 = 1$	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
$x_1 = 2$	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
$x_1 = 3$	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)

Beispiel (Multivariate Wahrscheinlichkeitsmassfunktion)

Wir betrachten einen zweidimensionalen Zufallsvektor $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ der Werte in $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ annimmt, wobei $\mathcal{X}_1 := \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{X}_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ seien.

Eine exemplarische bivariate WMF der Form

$$p_\xi : \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow [0, 1], (x_1, x_2) \mapsto p_\xi(x_1, x_2) \quad (8)$$

ist dann durch nachfolgende Tabelle definiert:

$p_\xi(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$
$x_1 = 1$	0.1	0.0	0.2	0.1
$x_1 = 2$	0.1	0.2	0.0	0.0
$x_1 = 3$	0.0	0.1	0.1	0.1

Man beachte, dass $\sum_{x_1=1}^3 \sum_{x_2=1}^4 p_\xi(x_1, x_2) = 1$.

Definition (Kontinuierlicher Zufallsvektor, Multivariate WDF)

Ein Zufallsvektor ξ heißt *kontinuierlich*, wenn \mathbb{R}^n der Ergebnisraum von ξ ist und eine Funktion

$$p_\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto p_\xi(x), \quad (9)$$

existiert, für die gilt

$$(1) \int_{\mathbb{R}^n} p_\xi(x) dx = 1 \text{ und}$$

$$(2) \mathbb{P}_\xi(x_1 \leq \xi \leq x_2) = \int_{x_{1_1}}^{x_{2_1}} \cdots \int_{x_{1_n}}^{x_{2_n}} p_\xi(s_1, \dots, s_n) ds_1 \cdots ds_n.$$

Eine entsprechende Funktion p heißt *multivariate Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF)* von ξ .

Bemerkungen

- Der Begriff der multivariaten WDF ist analog zum Begriff der WDF.
- Man spricht häufig auch einfach von der WDF eines Zufallsvektors
- Wie univariate WDFen sind multivariate WDFen nicht-negativ und normiert.
- Wie für kontinuierliche Zufallsvariablen gilt für kontinuierliche Zufallsvektoren

$$\mathbb{P}_\xi(\xi = x) = \mathbb{P}_\xi(x \leq \xi \leq x) = \int_{x_1}^{x_1} \cdots \int_{x_n}^{x_n} p_\xi(s_1, \dots, s_n) ds_1 \cdots ds_n = 0 \quad (10)$$

Definition

Multivariate Verteilungen

Marginalverteilungen

Bedingte Verteilungen

Unabhängige Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

Definition (Univariate Marginalverteilung)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ sei ein n -dimensionaler Messraum, $\xi : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ sei ein Zufallsvektor, \mathbb{P}_ξ sei die Verteilung von ξ , $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{X}$ sei der Ergebnisraum der i ten Komponente ξ_i von ξ , und \mathcal{S}_i sei eine σ -Algebra auf \mathcal{X}_i . Dann heißt die durch

$$\mathbb{P}_{\xi_i} : \mathcal{S}_i \rightarrow [0, 1], S \mapsto \mathbb{P}_\xi (\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_{i-1} \times S \times \mathcal{X}_{i+1} \times \cdots \times \mathcal{X}_n) \text{ für } S \in \mathcal{S}_i \quad (11)$$

definierte Verteilung die *ite univariate Marginalverteilung* von ξ .

Bemerkungen

- Univariate Marginalverteilungen sind die Verteilungen der Komponenten eines Zufallsvektors.
- Univariate Marginalverteilungen sind Verteilungen von Zufallsvariablen.
- Die Festlegung der multivariaten Verteilung von ξ legt auch die Verteilungen der ξ_i fest.

Theorem (Marginale Wahrscheinlichkeitsmasse- und dichtefunktionen)

(1) $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ sei ein n -dimensionaler diskreter Zufallsvektor mit Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion p_ξ und Komponentenergebnisräumen $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$. Dann ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion der i ten Komponente ξ_i von ξ als

$$p_{\xi_i} : \mathcal{X}_i \rightarrow [0, 1], x_i \mapsto p_{\xi_i}(x_i) := \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{i-1}} \sum_{x_{i+1}} \cdots \sum_{x_n} p_\xi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (12)$$

(2) $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ sei ein n -dimensionaler kontinuierlicher Zufallsvektor mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion p_ξ und Komponentenergebnisraum \mathbb{R} . Dann ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der i ten Komponente ξ_i von ξ als

$$p_{\xi_i} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x_i \mapsto p_{\xi_i}(x_i) := \int_{x_1} \cdots \int_{x_{i-1}} \int_{x_{i+1}} \cdots \int_{x_n} p_\xi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n. \quad (13)$$

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Die WMFen der univariaten Marginalverteilungen diskreter Zufallsvektoren ergeben sich durch Summation.
- Die WDFen der univariaten Marginalverteilungen kontinuierlicher Zufallsvektoren ergeben sich durch Integration.

Beispiel (Marginale Wahrscheinlichkeitsmassfunktionen)

Wir betrachten erneut den zweidimensionalen Zufallsvektor $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ der Werte in $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ annimmt, wobei $\mathcal{X}_1 := \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{X}_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ seien.

Basierend auf der oben definierten WMF ergeben sich folgende marginale WMFen p_{ξ_1} und p_{ξ_2} :

$p_{\xi}(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$p_{\xi_1}(x_1)$
$x_1 = 1$	0.1	0.0	0.2	0.1	0.4
$x_1 = 2$	0.1	0.2	0.0	0.0	0.3
$x_1 = 3$	0.0	0.1	0.1	0.1	0.3
$p_{\xi_2}(x_2)$	0.2	0.3	0.3	0.2	

Man beachte, dass $\sum_{x_1=1}^3 p_{\xi_1}(x_1) = 1$ und $\sum_{x_2=1}^4 p_{\xi_2}(x_2) = 1$ gilt.

Beispiel (Marginale Wahrscheinlichkeitsmassenfunktionen)

Ein Realisierungsbeispiel mithilfe relativer Häufigkeiten mag den Begriff der marginalen WMF intuitiv verdeutlichen. Nehmen wir an, wir hätten $n = 100$ (unabhängige) Realisierungen von ξ vorliegen.

Um die Wahrscheinlichkeiten $p_{\xi}(x_1, x_2)$ zu schätzen, würden wir die Anzahl der Realisierungen von (x_1, x_2) zählen und durch n teilen. Hätten wir beispielsweise 12 Realisierungen von $(3, 2)$ vorliegen, so würden wir $p_{\xi}(3, 2) \approx 12/100 = 0.12$ schätzen.

Die Frage nach der marginalen Wahrscheinlichkeit von $x_2 = 2$ entspräche dann der Frage, wie oft unter den Realisierungen zu finden sind, bei denen $x_2 = 2$ ist, irrespektive des Wertes von x_1 . Dies wäre gerade die Anzahl der Realisierungen der Form $(1, 2)$, $(2, 2)$ und $(3, 2)$. Gäbe es von diesen beispielsweise 0, 22 und 12 respektive, so würde man die Wahrscheinlichkeit $p_{\xi_2}(2)$ natürlicherweise durch

$$\frac{0 + 22 + 12}{100} = \frac{0}{100} + \frac{22}{100} + \frac{12}{100} = 0.00 + 0.22 + 0.12 = 0.34 \quad (14)$$

schätzen. Anstelle der Wahrscheinlichkeiten $p_{\xi}(1, 2)$, $p_{\xi}(2, 2)$, $p_{\xi}(3, 2)$ addiert man hier also die entsprechenden relativen Häufigkeiten.

Definition

Multivariate Verteilungen

Marginalverteilungen

Bedingte Verteilungen

Unabhängige Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

Bedingte Verteilungen

Vorbemerkungen

Wir erinnern uns, dass für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$ die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B definiert ist als

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \quad (15)$$

Analog wird für zwei Zufallsvariablen ξ_1, ξ_2 mit Ereignisräumen $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ und (messbaren) Mengen $S_1 \in \mathcal{X}_1, S_2 \in \mathcal{X}_2$ die bedingte Verteilung von ξ_1 gegeben ξ_2 mithilfe der Ereignisse

$$A := \{\xi_1 \in S_1\} \text{ und } B := \{\xi_2 \in S_2\} \quad (16)$$

definiert.

So ergibt sich zum Beispiel die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass $\xi_1 \in S_1$ gegeben dass $\xi_2 \in S_2$ unter der Annahme, dass $\mathbb{P}(\{\xi_2 \in S_2\}) > 0$, zu

$$\mathbb{P}(\{\xi_1 \in S_1\}|\{\xi_2 \in S_2\}) = \frac{\mathbb{P}(\{\xi_1 \in S_1\} \cap \{\xi_2 \in S_2\})}{\mathbb{P}(\{\xi_2 \in S_2\})}. \quad (17)$$

Wir betrachten zunächst durch WMFen/WDFen zweidimensionaler Zufallsvektoren definierte bedingte Verteilungen.

Definition (Bedingte WMF, diskrete bedingte Verteilung)

$\xi := (\xi_1, \xi_2)$ sei ein diskreter Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, WMF $p_\xi = p_{\xi_1, \xi_2}$ und marginalen WMFen p_{ξ_1} und p_{ξ_2} . Die bedingte WMF von ξ_1 gegeben $\xi_2 = x_2$ ist dann für $p_{\xi_2}(x_2) > 0$ definiert als

$$p_{\xi_1|\xi_2=x_2} : \mathcal{X}_1 \rightarrow [0, 1], x_1 \mapsto p_{\xi_1|\xi_2=x_2}(x_1|x_2) := \frac{p_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)}{p_{\xi_2}(x_2)} \quad (18)$$

Analog ist für $p_{\xi_1}(x_1) > 0$ die bedingte WMF von ξ_2 gegeben $\xi_1 = x_1$ definiert als

$$p_{\xi_2|\xi_1=x_1} : \mathcal{X}_2 \rightarrow [0, 1], x_2 \mapsto p_{\xi_2|\xi_1=x_1}(x_2|x_1) := \frac{p_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)}{p_{\xi_1}(x_1)} \quad (19)$$

Die bedingten Verteilungen mit WMFen $p_{\xi_1|\xi_2=x_2}$ und $p_{\xi_2|\xi_1=x_1}$ heißen dann die *diskreten bedingten Verteilungen* von ξ_1 gegeben $\xi_2 = x_2$ und ξ_2 gegeben $\xi_1 = x_1$, respektive.

Bemerkungen

- In Analogie zur Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit von Ereignissen gilt also

$$p_{\xi_1|\xi_2}(x_1|x_2) = \frac{p_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)}{p_{\xi_2}(x_2)} = \frac{\mathbb{P}(\{\xi_1 = x_1\} \cap \{\xi_2 = x_2\})}{\mathbb{P}(\{\xi_2 = x_2\})}. \quad (20)$$

- Bedingte Verteilungen sind (lediglich) normalisierte gemeinsame Verteilungen.

Beispiel (Bedingte Wahrscheinlichkeitsmassenfunktionen)

Wir betrachten erneut den zweidimensionalen Zufallsvektor $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ der Werte in $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ annimmt, wobei $\mathcal{X}_1 := \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{X}_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ seien.

Basierend auf der oben definierten WMF und den entsprechenden oben evaluierten marginalen WMFen ergeben sich folgende bedingte WMFen für $p_{\xi_2|\xi_1=x_1}$

$p_{\xi_2 \xi_1}(x_2 x_1)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$
$p_{\xi_2 \xi_1=1}(x_2 x_1 = 1)$	$\frac{0.1}{0.4} = 0.25$	$\frac{0.0}{0.4} = 0.00$	$\frac{0.2}{0.4} = 0.50$	$\frac{0.1}{0.4} = 0.25$
$p_{\xi_2 \xi_1=2}(x_2 x_1 = 2)$	$\frac{0.1}{0.3} = 0.3\bar{3}$	$\frac{0.2}{0.3} = 0.6\bar{6}$	$\frac{0.0}{0.3} = 0.00$	$\frac{0.0}{0.3} = 0.00$
$p_{\xi_2 \xi_1=3}(x_2 x_1 = 3)$	$\frac{0.0}{0.3} = 0.00$	$\frac{0.1}{0.3} = 0.3\bar{3}$	$\frac{0.1}{0.3} = 0.3\bar{3}$	$\frac{0.1}{0.3} = 0.3\bar{3}$

Bemerkungen

- Man beachte, dass $\sum_{x_2=1}^4 p_{\xi_2|\xi_1=x_1}(x_2|x_1) = 1$ für alle $x_1 \in \mathcal{X}_1$.
- Man beachte die qualitative Ähnlichkeit der WMFen $p_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)$ und $p_{\xi_2|\xi_1}(x_2|x_1)$.
- Bedingte Verteilungen sind (lediglich) normalisierte gemeinsame Verteilungen.

Definition (Bedingte WDF, kontinuierliche bedingte Verteilungen)

$\xi := (\xi_1, \xi_2)$ sei ein kontinuierlicher Zufallsvektor mit Ergebnisraum \mathbb{R}^2 , WDF $p_\xi = p_{\xi_1, \xi_2}$ und marginalen WDFen p_{ξ_1} und p_{ξ_2} . Die bedingte WDF von ξ_1 gegeben $\xi_2 = x_2$ ist dann für $p_{\xi_2}(x_2) > 0$ definiert als

$$p_{\xi_1|\xi_2=x_2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x_1 \mapsto p_{\xi_1|\xi_2=x_2}(x_1|x_2) := \frac{p_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)}{p_{\xi_2}(x_2)} \quad (21)$$

Analog ist für $p_{\xi_1}(x_1) > 0$ die bedingte WMF von ξ_2 gegeben $\xi_1 = x_1$ definiert als

$$p_{\xi_2|\xi_1=x_1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x_2 \mapsto p_{\xi_2|\xi_1=x_1}(x_2|x_1) := \frac{p_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)}{p_{\xi_1}(x_1)} \quad (22)$$

Die Verteilungen mit WDFen $p_{\xi_1|\xi_2=x_2}$ und $p_{\xi_2|\xi_1=x_1}$ heißen dann die *kontinuierlichen bedingten Verteilungen* von ξ_1 gegeben $\xi_2 = x_2$ und ξ_2 gegeben $\xi_1 = x_1$, respektive.

Bemerkung

- Im kontinuierlichen Fall gilt zwar $\mathbb{P}(\xi = x) = 0$, aber nicht notwendig auch $p_\xi(x) = 0$.

Definition

Multivariate Verteilungen

Marginalverteilungen

Bedingte Verteilungen

Unabhängige Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

Definition (Unabhängige Zufallsvariablen)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ ein zweidimensionaler Zufallsvektor. Die Zufallsvariablen ξ_1, ξ_2 mit Ergebnisräumen $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ heißen *unabhängig*, wenn für alle $S_1 \subseteq \mathcal{X}_1$ und $S_2 \subseteq \mathcal{X}_2$ gilt, dass

$$\mathbb{P}_\xi(\xi_1 \in S_1, \xi_2 \in S_2) = \mathbb{P}_{\xi_1}(\xi_1 \in S_1)\mathbb{P}_{\xi_2}(\xi_2 \in S_2). \quad (23)$$

Bemerkungen

- Die Definition besagt, dass die Ereignisse $\{\xi_1 \in S_1\}$ und $\{\xi_2 \in S_2\}$ unabhängig sind.
- Es gilt also auch, dass $\mathbb{P}(\{\xi_1 \in S_1\}|\{\xi_2 \in S_2\}) = \mathbb{P}(\{\xi_1 \in S_1\})$.
- Wissen um das Ereignis $\{\xi_2 \in S_2\}$ verändert die Wahrscheinlichkeit von $\{\xi_1 \in S_1\}$ nicht.
- Einen formaleren Zugang bietet das Konzept der *Produktwahrscheinlichkeitsräume*.

Theorem (Unabhängigkeit und Faktorisierung der WMF/WDF)

(1) $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ sei ein diskreter Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, WMF p_ξ und marginalen WMFen p_{ξ_1}, p_{ξ_2} . Dann gilt

ξ_1 und ξ_2 sind unabhängige Zufallsvariablen \Leftrightarrow

$$p_\xi(x_1, x_2) = p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2) \text{ für alle } (x_1, x_2) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2. \quad (24)$$

(2) $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ sei ein kontinuierlicher Zufallsvektor mit Ergebnisraum \mathbb{R}^2 , WDF p_ξ und marginalen WDFen p_{ξ_1}, p_{ξ_2} . Dann gilt

ξ_1 und ξ_2 sind unabhängige Zufallsvariablen \Leftrightarrow

$$p_\xi(x_1, x_2) = p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2) \text{ für alle } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (25)$$

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Die Produkteigenschaft $p_\xi(x_1, x_2) = p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)$ heißt auch *Faktorisierung*.
- Unabhängigkeit zweier ZVen entspricht der Faktorisierung ihrer gemeinsamen WMF/WDF.

Unabhängige Zufallsvariablen

Beispiel (Unabhängige diskrete Zufallsvariablen)

Wir betrachten erneut den zweidimensionalen Zufallsvektor $\xi := (\xi_1, \xi_2)$, der Werte in $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ annimmt, und dessen gemeinsame und marginale WMFen die untenstehende Form haben

$p_\xi(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$p_{\xi_1}(x_1)$
$x_1 = 1$	0.10	0.00	0.20	0.10	0.40
$x_1 = 2$	0.10	0.20	0.00	0.00	0.30
$x_1 = 3$	0.00	0.10	0.10	0.10	0.30
$p_{\xi_2}(x_2)$	0.20	0.30	0.30	0.20	

Da hier gilt, dass

$$p_\xi(1, 1) = 0.10 \neq 0.08 = 0.40 \cdot 0.20 = p_{\xi_1}(1)p_{\xi_2}(1) \quad (26)$$

sind die Zufallsvariablen ξ_1 und ξ_2 nicht unabhängig.

Unabhängige Zufallsvariablen

Beispiel (Unabhängige diskrete Zufallsvariablen)

Die gemeinsame Verteilung von ξ_1 und ξ_2 unter der Annahme der Unabhängigkeit von ξ_1 und ξ_2 bei gleichen Marginalverteilungen ergibt sich zu

$p_{\xi}(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$p_{\xi_1}(x_1)$
$x_1 = 1$	0.08	0.12	0.12	0.08	0.40
$x_1 = 2$	0.06	0.09	0.09	0.06	0.30
$x_1 = 3$	0.06	0.09	0.09	0.06	0.30
$p_{\xi_2}(x_2)$	0.20	0.30	0.30	0.20	

Weiterhin ergeben sich im Falle der Unabhängigkeit von ξ_1 und ξ_2 zum Beispiel die bedingten Wahrscheinlichkeitsmassefunktion $p_{\xi_2|\xi_1}$ zu

$p_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$
$p_{\xi_2 \xi_1=1}(x_2 x_1 = 1)$	$\frac{0.08}{0.40} = 0.2$	$\frac{0.12}{0.40} = 0.3$	$\frac{0.12}{0.40} = 0.3$	$\frac{0.08}{0.40} = 0.2$
$p_{\xi_2 \xi_1=2}(x_2 x_1 = 2)$	$\frac{0.06}{0.30} = 0.2$	$\frac{0.09}{0.30} = 0.3$	$\frac{0.09}{0.30} = 0.3$	$\frac{0.06}{0.30} = 0.2$
$p_{\xi_2 \xi_1=3}(x_2 x_1 = 3)$	$\frac{0.06}{0.30} = 0.2$	$\frac{0.09}{0.30} = 0.3$	$\frac{0.09}{0.30} = 0.3$	$\frac{0.06}{0.30} = 0.2$

Im Falle der Unabhängigkeit von ξ_1 und ξ_2 ändert sich die Verteilung von ξ_2 gegeben (oder im Wissen um) den Wert von ξ_1 also nicht und entspricht jeweils der Marginalverteilung von ξ_2 . Dies entspricht natürlich der Intuition der Unabhängigkeit von Ereignissen im Kontext elementarer Wahrscheinlichkeiten.

Definition (n unabhängige Zufallsvariablen)

$\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)$ sei ein n -dimensionaler Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathcal{X} = \times_{i=1}^n \mathcal{X}_i$. Die n Zufallsvariablen ξ_1, \dots, ξ_n heißen *unabhängig*, wenn für alle $S_i \in \mathcal{X}_i, i = 1, \dots, n$ gilt, dass

$$\mathbb{P}_\xi(\xi_1 \in S_1, \dots, \xi_n \in S_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{\xi_i}(\xi_i \in S_i). \quad (27)$$

Wenn der Zufallsvektor eine n -dimensionale WMF oder WDF p_ξ mit marginalen WMFen oder WDFen $p_{\xi_i}, i = 1, \dots, n$ besitzt, dann ist die Unabhängigkeit von ξ_1, \dots, ξ_n gleichbedeutend mit der Faktorisierung der gemeinsamen WMF oder WDF, also mit

$$p_\xi(\xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{i=1}^n p_{\xi_i}(x_i). \quad (28)$$

Bemerkung

- Es handelt sich um eine direkte Generalisierung des zweidimensionalen Falls.

Definition (Unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen)

n Zufallsvariablen ξ_1, \dots, ξ_n heißen *unabhängig und identisch verteilt (u.i.v.)*, wenn

- (1) ξ_1, \dots, ξ_n unabhängige Zufallsvariablen sind, und
- (2) die Marginalverteilungen der ξ_i übereinstimmen, also gilt, dass

$$\mathbb{P}_{\xi_i} = \mathbb{P}_{\xi_j} \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq n. \quad (29)$$

Wenn die Zufallsvariablen ξ_1, \dots, ξ_n unabhängig und identisch verteilt sind und die i te Marginalverteilung $\mathbb{P}_\xi := \mathbb{P}_{\xi_i}$ ist, so schreibt man auch

$$\xi_1, \dots, \xi_n \sim \mathbb{P}_\xi. \quad (30)$$

Bemerkungen

- Man sagt kurz, dass ξ_1, \dots, ξ_n u.i.v. sind.
- Im Englischen spricht man von *independent and identically distributed (i.i.d)* Zufallsvariablen.
- In der Statistik werden Fehlerterme meist durch u.i.v. Zufallsvariablen modelliert.
- n u.i.v. normalverteilte ZVen werden als $\xi_1, \dots, \xi_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ geschrieben.

Definition

Multivariate Verteilungen

Marginalverteilungen

Bedingte Verteilungen

Unabhängige Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Definieren Sie den Begriff des Zufallsvektors.
2. Definieren Sie den Begriff der multivariaten Verteilung eines Zufallsvektors.
3. Definieren Sie den Begriff der multivariaten WMF.
4. Definieren Sie den Begriff der multivariaten WDF.
5. Definieren Sie den Begriff der univariaten Marginalverteilung eines Zufallsvektors.
6. Wie berechnet man die WMF der i ten Komponente eines diskreten Zufallsvektors?
7. Wie berechnet man die WDF der i ten Komponente eines kontinuierlichen Zufallsvektors?
8. Definieren Sie den Begriff der Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen.
9. Wie erkennt man an der gemeinsamen WMF oder WDF eines zweidimensionalen Zufallsvektors, ob die Komponenten des Zufallsvektors unabhängig sind oder nicht?
10. Definieren Sie den Begriff der Unabhängigkeit von n Zufallsvariablen.
11. Definieren Sie den Begriff n unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen.