Psychologische Forschungsmethoden

BSc Philosophie-Neurowissenschaften-Kognition WiSe 2022/23

BSc Psychologie WiSe 2022/23

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(9) Extensivmessung

Vorbemerkungen

Extensivmessung nach Hölder

Extensive Strukturen

Repräsentation und Eindeutigkeit

Selbstkontrollfragen

Vorbemerkungen

Extensivmessung nach Hölder

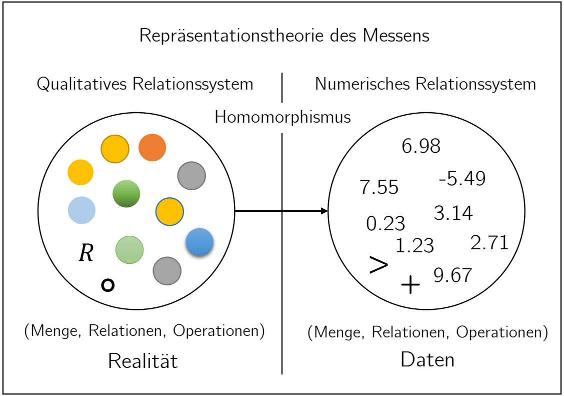
Extensive Strukturen

Repräsentation und Eindeutigkeit

Selbstkontrollfragen

Vorgehensweisen messtheoretischer Überlegungen

$\Rightarrow$ Vom qualitativen Relationssystem zum Homomorphismus und numerischen Relationssystem



$\Leftarrow$ Vom numerischen Relationssystem und Homomorphismus zum qualitativen Relationssystem

Extensivmessungen am Beispiel des Messens der Masse eines Objektes

Messen der Masse von Objekten bedeutet, den Objekten Zahlen so zuzuordnen, dass die qualitative Relation "Objekt m ist schwerer als Objekt n" in der Realität im Bereich der Zahlen erhalten bleibt. Weiterhin möchte man beim Messen der Masse von Objekten auch sicherstellen, dass der Messprozess additiv ist, d.h. dass die Masse der physischen Kombination zweier Objekte der Summation der Massen der einzelnen Objekte entspricht. **Dabei ist die Additivität der Messwerte bei Kombination von Messobjekten das zentrale Charakteristikum der Extensivmessung**.

Sei M die Menge von Objekten, sei R die Gewichtsvergleichrelation, d.h. für $m, n \in M$ gelte

$$m \text{ ist schwerer als } n \Leftrightarrow (m, n) \in R \tag{1}$$

und $\circ$ sei die Operation des physischen Kombinierens zweier Objekte, d.h. für $m, n \in M$ gelte

$$m \text{ wird kombiniert mit } n \Leftrightarrow m \circ n. \tag{2}$$

Dann möchte man bei der Messung der Masse m und n also so mit einer Funktion f Zahlen zuordnen, dass

$$m \text{ ist schwerer als } n \Leftrightarrow (m, n) \in R \Leftrightarrow f(m) > f(n) \tag{3}$$

und

$$f(m \text{ wird kombiniert mit } n) \Leftrightarrow f(m \circ n) = f(m) + f(n). \tag{4}$$

gelten.

Wissenschaftshistorischer Hintergrund

SCIENCE

Vol. 103, No. 2684 Friday, June 7, 1946

On the Theory of Scales of Measurement

S. S. Stevens
Director, Psycho-Acoustic Laboratory, Harvard University

FOR SEVEN YEARS A COMMITTEE of the British Association for the Advancement of Science debated the problem of measurement. Appointed in 1932 to represent Section A (Mathematical and Physical Sciences) and Section J (Psychology), the committee was instructed to consider and report upon the possibility of "quantitative estimates of sensory events"—meaning simply: Is it possible to measure human sensation? Deliberation led only to disagreement, mainly about what is meant by the term measurement. An interim report in 1938 found one member complaining that his colleagues "came out by that same door as they went in," and in order to have another try at agreement, the committee begged to be continued for another year.

For its final report (1940) the committee chose a common bone for its contentions, directing its arguments at a concrete example of a sensory scale. This was the Sone scale of loudness (S. S. Stevens and H. Davis. *Hearing.* New York: Wiley, 1938), which purports to measure the subjective magnitude of an auditory sensation against a scale having the formal properties of other basic scales, such as those used to measure length and weight. Again the 19 members of the committee came out by the routes they entered, and their views ranged widely between two extremes. One member submitted "that any law purporting to express a quantitative relation between sensation intensity and stimulus intensity is not merely false but is in fact meaningless unless and until a meaning can be given to the concept of addition as applied to sensation" (Final Report, p. 245).

Stevens (1946) (vgl. Campbell and Jeffreys (1938))

Extensivmessungen in der Physik

Beispiele für Extensivmessungen im Bereich der Physik sind die Bestimmungen *extensiver Größen*.

- *Extensive Größen* sind Größen, die sich mit der Größe des betrachteten Systems additiv ändern.
- Beispiele für extensive Größen bei denen eine explizite physikalische Kombination möglich ist:
- $\rightarrow$ Masse, Länge, Volumen, Teilchenanzahl, elektrische Ladung, Entropie, u.v.a.m.

$\Rightarrow$ Für einige physikalische Messungen ist das messtheoretische Modell der Extensivmessung relevant

Gegenbeispiele für Extensivmessungen im Bereich der Physik sind die Bestimmungen *intensiver Größen*

- *Intensive Größen* sind Größen, die sich mit der Größe des betrachteten Systems nicht (additiv) ändern
- Beispiele für intensive Größen bei denen eine explizite physikalische Kombination nicht möglich ist:
- $\rightarrow$ Temperatur, Dichte, Viskosität, Druck, Permittivität, magnetische Felddichte, u.v.a.m.

$\Rightarrow$ Für andere physikalische Messungen ist das messtheoretische Modell der Extensivmessung nicht relevant

Weiterhin gibt es in der Physik Größen, die kontextabhängig entweder extensiv oder intensiv sind

- Die elektrische Spannung ist in Reihenschaltung extensiv, in Parallelschaltung intensiv
- Die elektrische Stromstärke Reihenschaltung intensiv, in Parallelschaltung extensiv

Vorbemerkungen

Extensivmessungen in der Psychologie

Beispiele für Extensivmessungen im Bereich der Psychologie sind

- Elektroenzephalographische Messungen (Messung elektrischer Spannung)
- Hautleitwiderstandsmessungen (Messung elektrischer Spannung)
- Blickbewegungsstudien (Länge)
- Reaktionszeitstudien (Zeit)
- Bestimmung medizinisch-physiologischer Parameter wie Hormonplasmaspiegel (Teilchenanzahl)
- Messungen subjektive Wahrscheinlichkeiten und wahrgenommener Risiken (vgl. Krantz and Suppes (1971))

$\Rightarrow$ Für einige psychologische Messungen ist das messtheoretische Modell der Extensivmessung relevant

Gegenbeispiele für Extensivmessungen im Bereich der Psychologie sind

- Funktionale Magnetresonanztomographische Messungen (Nichtlinearitäten der BOLD-Response)
- Magnetoenzephalographische Messungen (Messung magnetischer Felddichten)
- Lautheitsmessungen (Hörtests)
- Kontrastwahrnehmungsmessungen (Sehtests)
- Intelligenztests
- Persönlichkeitsdiagnostik

$\Rightarrow$ Für andere psychologische Messungen ist das messtheoretische Modell der Extensivmessung nicht relevant

Vorbemerkungen

Überblick

Wir geben in dieser Einheit einen Überblick zu messtheoretischen Modellen der Extensivmessung.

- Im Abschnitt **Extensivmessung nach Hölder** diskutieren wir Hölders Theorem (Hölder (1901), Michell, Ernst, and Hölder (1996)). Das Theorem ist ein Repräsentationstheorem für Extensivmessungen und besagt, dass eine *Archimedisch geordnete Gruppe* homomorph in das quantitative Relationssystem $(\mathbb{R}, >, +)$ abgebildet werden kann. Für ein Verständnis des Theorems wird also ein Verständnis des Begriffes der Archimedisch geordneten Gruppe benötigt, welches insgesamt für das Verständnis der messtheoretischen Konzeption einer Extensivmessung nötig ist. Für führen in diesem Abschnitt also zunächst die Begriffsbildung der Archimedisch geordneten Gruppe ein und formulieren dann Hölders Theorem.
- Das Modell der Archimedisch geordneten Gruppe als Modell für physikalische Extensivmessungen hat einige Unzulänglichkeiten, die spätere Messtheoretiker:innen versucht haben zu verbessern (vgl. Krantz and Suppes (1971)). Im Abschnitt **Extensive Strukturen** diskutieren wir eine von Roberts and Luce (1968) vorgeschlagene Verbesserung des Modells des qualitativen Relationssystem der Extensivmessung.
- Im Abschnitt **Repräsentation und Eindeutigkeit** geben wir schließlich das Repräsentationstheorem für extensive Strukturen an und zeigen, dass die Klasse der zulässigen Transformationen von Homomorphismen von einer extensiven Struktur nach $(\mathbb{R}, >, +)$ die Menge der Änlichkeitstransformationen ist, dass also Extensivmessungen auf Verhältnisskalen führen.

Definition (Vollständigkeit)

Eine Binärrelation R auf einer Menge M heißt *vollständig*, wenn für alle $m, n \in M$ mit $m \neq n$ gilt, dass entweder $(m, n) \in R$ oder $(n, m) \in R$ ist.

Bemerkungen

- Bei einer vollständigen Relation stehen *alle ungleichen* Elemente von M in Relation.
- Die $>$ Relation auf $\mathbb{R}$ ist vollständig, weil für alle x, y mit $x \neq y$ gilt, dass entweder $x > y$ oder $y > x$.

Definition (Strenge einfache Ordnung)

M sei eine Menge und R sei eine Binärrelation auf M. R heißt *strenge einfache Ordnung* auf M, wenn R asymmetrisch, transitiv und vollständig ist.

Bemerkungen und Beispiele

- Die $>$ Relation auf $\mathbb{R}$ ist eine strenge einfache Ordnung, denn

  ... $>$ ist asymmetrisch, weil für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, dass wenn $x > y$ auch $y \not> x$ gilt.

  ... $>$ ist transitiv, weil für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt, dass mit $x > y$ und $y > z$ auch $x > z$ ist.

  ... $>$ ist vollständig, weil für alle x, y mit $x \neq y$ gilt, dass entweder $x > y$ oder $y > x$.
- Im Unterschied zur strengen einfachen Ordnung muss die strenge schwache Ordnung nicht vollständig sein.

Definition (Gruppe)

Ein Tupel $(M, \circ)$ aus einer Menge M und einer Operation $\circ$ auf M heißt *Gruppe*, wenn für $(M, \circ)$ gelten:

(1) (Assoziativität) Für alle $m, n, p \in M$ gilt

$$(m \circ n) \circ p = m \circ (n \circ p). \tag{5}$$

(2) (Neutrales Element). Es gibt ein *neutrales Element* $e \in M$, so dass für alle $m \in M$ gilt, dass

$$m \circ e = e \circ m = m. \tag{6}$$

(3) (Inverse Elemente). Für alle $m \in M$ existiert ein *inverses Element*, so dass

$$m \circ n = n \circ m = e. \tag{7}$$

Bemerkungen und Beispiele

- Da Operationen Tupel $(m, n) \in M \times M$ nach M abbilden, sind Gruppen auch immer *geschlossen*, d.h.

$$m \circ n \in M \text{ für alle } m, n \in M. \tag{8}$$

- $(\mathbb{R}, +)$ ist eine Gruppe, wobei $0 \in \mathbb{R}$ das neutrale Element und $-m \in \mathbb{R}$ das zu m inverse Element ist.
- $(\mathbb{R}, \cdot)$ ist keine Gruppe, weil $1 \in \mathbb{R}$ das einzige neutrale Element ist und $0 \in \mathbb{R}$ damit kein inverses Element hat: es gibt kein $n \in \mathbb{R}$ mit $0 \cdot n = n \cdot 0 = 1$.
- $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ ist eine Gruppe, wobei $1 \in \mathbb{R}$ das neutrale Element und $\frac{1}{m} \in \mathbb{R}$ das zu m inverse Element ist.

Definition (Natürliches Vielfaches)

$(M, \circ)$ sei eine Gruppe und es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist das *natürliche Vielfache* eines $m \in M$ induktiv definiert als

(1) $1m := m$

(2) $(n+1)m := m \circ nm$

Bemerkungen und Beispiele

- Wir betrachten $(\mathbb{R}, +)$ und wählen $n := 2$ für ein $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt nach obiger Definition

$$(2+1)x := x + 2x \text{ mit } 2x = (1+1)x := x + 1x \text{ mit } 1x = x. \tag{9}$$

  Es gilt hier also z.B. für $x := 2$, dass

$$1x = 2 \Rightarrow 2x = 2 + 2 = 4 \Rightarrow 3x := 2 + 4 = 6. \tag{10}$$

  Dieses Beispiel ist wichtig.
- Wir betrachten $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ und wählen $n := 2$ für ein $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt nach obiger Definition

$$(2+1)x := x \cdot 2x \text{ mit } 2x = (1+1)x := x \cdot 1x \text{ mit } 1x = x. \tag{11}$$

  Es gilt hier also z.B. für $x := 2$, dass

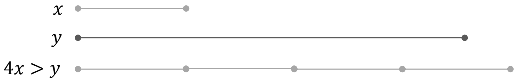
$$1x = 2 \Rightarrow 2x = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow 3x := 2 \cdot 4 = 8. \tag{12}$$

Theorem (Archimedische Eigenschaft der reellen Zahlen)

Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $nx > y$.

Bemerkungen

- $\mathbb{R}$ wird hier im Sinne der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ verstanden.
- nx bezeichnet also das oben definierte natürliche Vielfache von x.
- Wir verzichten auf einen Beweis zugunsten untenstehender Abbildung



- Das Theorem besagt, dass unabhängig davon, wie klein x sein mag oder wie groß y sein mag, wenn x positiv ist, dann sind ausreiched viele Kopien von x größer als y. Die Archimedische Eigenschaft der reellen Zahlen erlaubt es also, die relativen Größen von x und y zu vergleichen indem man ermittelt, wie viele Kopien von x nötig sind, um eine Zahl größer als y zu erhalten.

Definition (Archimedisch geordnete Gruppe)

M sei eine Menge, R sei eine Binärrelation auf M und $\circ$ sei eine Operation auf M. Dann heißt das Relationssystem $(M, R, \circ)$ *Archimedisch geordnete Gruppe*, wenn für $(M, R, \circ)$ gelten:

(1) R ist eine strenge einfache Ordnung.

(2) $(M, \circ)$ ist eine Gruppe.

(3) (Monotonie) Für alle $m, n, p \in M$ gilt, dass

$$(m, n) \in R \Leftrightarrow (m \circ p, n \circ p) \in R \Leftrightarrow (p \circ m, p \circ n) \in R. \tag{13}$$

(4) (Archimedische Eigenschaft) Für alle $m, m' \in M$ gilt, dass wenn $(m, e) \in R$ gilt, wobei $e \in M$ das neutrale Element der Gruppe $(M, \circ)$ bezeichnet, eine natürliche Zahl n existiert, so dass $(nm, m') \in R$ ist.

Das Standardbeispiel für eine Archimedische geordnete Gruppe ist $(\mathbb{R}, >, +)$.

- Wir haben oben bereits gesehen, dass $(\mathbb{R}, >)$ eine strenge einfache Ordnung ist und $(\mathbb{R}, +)$ eine Gruppe ist.
- Die Monotonie Eigenschaft von $(\mathbb{R}, >, +)$ folgt für $x, y, z \in \mathbb{R}$ aus

$$x > y \Leftrightarrow x + z > y + z \Leftrightarrow z + x > z + y. \tag{14}$$

- Hinsichtlich der Archimedischen Eigenschaft gilt, dass $e := 0 \in \mathbb{R}$ das neutrale Element von $+$ auf $\mathbb{R}$ ist. Die Bedingung $(x, e) \in R$ entspricht also der Bedingung $x > 0$ der Archimedischen Eigenschaft der reellen Zahlen. Analog entspricht für $x, y \in \mathbb{R}$ die Aussage über die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$ mit $(nm, m') \in R$ der Aussage über die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$.

Definition (Hölders Theorem)

$(M, R, \circ)$ sei eine Archimedisch geordnete Gruppe. Dann existiert eine Funktion der Form

$$f : M \to \mathbb{R}, m \mapsto f(m) \tag{15}$$

so dass für alle $m, n \in M$ gilt, dass

$$(m, n) \in R \Leftrightarrow f(m) > f(n) \tag{16}$$

und

$$f(m \circ n) = f(m) + f(n). \tag{17}$$

Bemerkungen

- Für einen Beweis verweisen wir auf Krantz and Suppes (1971).
- Wenn ein qualitiatives Relationssystem $\mathcal{M}$ also eine Archimedisch geordnete Gruppe ist, dann existiert ein Homomorphismus von $\mathcal{M}$ in das quantitative Relationssystem $\mathcal{N} := (\mathbb{R}, >, +)$. In anderen Worten ist eine Archimedisch geordnete Gruppe also homomorph zu $(\mathbb{R}, >, +)$.

Extensive Strukturen

Archimedische geordnete Gruppen als Modell des Messens der Masse von Objekten

Als Modell des Messens von Massen überzeugt Hölders Theorem nicht ganz, insbesondere deckt sich das Konzept der Archmidemisch geordneten Gruppe nicht vollständig mit der Intuition zum Umgang mit Massen. Wir betrachten die Eigenschaften einer Archimedisch geordneten Gruppe und die enstprechenden Intuitionen zum Umgang mit Massen.

(1) Die Tatsache, dass (M, R) eine strenge einfache Ordnung ist, ist vermutlich sinnvoll, allerdings kann es natürlich sein, dass zwei Objekte solch ähnliche Masse haben, dass sie hinsichtlich der "ist schwerer als" Relation nicht unterscheidbar sind.

(2) Die Tatsache, dass $(M, \circ)$ eine Gruppe ist, ist intuitiv weniger sinnvoll. Die Assoziativität der Kombination von Massen mag noch sinnvoll sein, wenn man an das Kombinieren von Gewichten in einer Waagschale denkt. Ein neutrales Element der Kombination von Massen mag als Idealisierung gerade noch vorstellbar sein, ein inverses Element jedoch nicht: ein neutrales Element wäre ein Objekt ohne Masse, ein zu einem Objekt m inverses Objekt n allerdings ein Objekt, dass wenn mit m kombiniert ein masseloses Objekt ergibt. Auf den Begriff der Gruppe möchte man also nach Möglichkeit bei der Formulierung des qualitativen Relationssystems bei Extensivmessungen verzichten.

(3) Die Monotonieeigenschaft bei der Bestimmung von Massen von Objekten ist dagegen eher nachvollziehbar: Wenn ein Objekt m schwerer als ein Objekt n eingeschätzt wird, dann sollten auch die Kombination von m mit einem dritten Objekt schwerer eingschätzt werden als die Kombination von n mit eben diesem Objekt.

(4) Die Archimedische Eigenschaft ist zumindest als Idealisierung vorstellbar: für zwei nicht masselose Objekt m und p ist es vorstellbar, ein Objekt nm aus n Kopien von m zu erstellen, so dass m schwerer als p ist.

Basierend auf den oben aufgeführten Unzulänglichkeiten des Modells der Extensivmessung nach Hölder, insbesondere der intuitiven Nicht-Existenz inverser Objekte, haben verschiedene Autoren Modifikationen des messtheoretischen Modells der Extensivmessung vorgeschlagen. Wir betrachten im Folgenden speziell das Modell der Extensivmessung nach Roberts and Luce (1968). Für eine kritische Diskussion dieses Ansatzes, siehe Michell, Ernst, and Hölder (1996), Michell (1997) und Michell (2021).

Extensive Strukturen

Definition (Extensive Struktur)

Ein Relationssystem $(M, R, \circ)$ heißt *extensive Struktur*, wenn $(M, R, \circ)$ folgende Eigenschaften hat:

(1) (Strenge schwache Ordnung) R ist eine strenge schwache Ordnung.

(2) (Schwache Assoziativität) Für alle $m, n, p \in M$ gilt

$$m \circ (n \circ p) \sim (m \circ n) \circ p \tag{18}$$

wobei $m \sim n$ für alle $m, n \in M$ genau dann gilt, wenn weder $(m, n) \in R$ noch $(n, m) \in R$.

(3) (Monotonie) Für alle $m, n, p \in M$ gilt, dass

$$(m, n) \in R \Leftrightarrow (m \circ p, n \circ p) \in R \Leftrightarrow (p \circ m, p \circ n) \in R. \tag{19}$$

(4) (Archimedische Eigenschaft) Für alle $p, q, r, s \in M$ gilt, dass wenn $(p, q) \in R$ gilt, ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $(np \circ r, nq \circ s) \in R$.

Bemerkungen

- Im Vergleich zu einer Archimedisch geordneten Gruppe ist nur die Monotonieeigenschaft unverändert.
- Der Begriff der Gruppe taucht als definierende Eigenschaft nicht auf.
- Wir erläutern im Folgenden die Eigenschaften (1), (2) und (4) einer extensiven Struktur.

Bemerkungen (fortgeführt)

- Im Unterschied zur Archimedisch geordneten Gruppe fordert Eigenschaft (1) lediglich, das (M, R) eine strenge schwache Ordnung und keine strenge einfache Ordnung ist. Im Gegensatz zur strengen einfachen Ordnung muss eine strenge schwache Ordnung nicht vollständig sein. Es muss also nicht für alle m, n mit $m \neq n$ gelten, dass $(m, n) \in R$ oder $(n, m) \in R$. In Bezug auf die "ist schwerer als" Relation bedeutet dies, dass im Modell der extensiven Struktur im Gegensatz zum Modell der Archimedisch geordneten Grupppe zwei ungleiche Objekte durchaus die gleiche Masse haben können.
- Eigenschaft (2) fordert im Gegensatz zur Assoziativität lediglich, dass für $r := m \circ (n \circ p)$ und $s := (m \circ n) \circ p$ gilt, dass $(r, s) \notin R$ und dass $(s, r) \notin R$, dass also zum Beispiel in Bezug auf das Messen einer Masse r nicht schwerer als s und s nicht schwerer als r ist. Es ist aber nicht gefordert, dass $r = s$ ist, dass r und s also identisch sind. Scheinbar spielt die schwache Assoziativität weiter auf die Unterscheidung von Zahlen, die wenn sie nicht verschieden sind, identisch sind, und qualitativen Objekten, die wenn sie die gleiche Eigenschaft haben, nicht identisch sein müssen, an. Klare Unterscheidungen des "Messens von Objekten" und des "Messens von Attributen" von Objekten finden sich bei Mundy (1987) und Swoyer (1987).
- Eigenschaft (4) ist eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Homomorphismus von einer extensiven Struktur nach $(\mathbb{R}, >, +)$ und reflektiert die Archimedische Eigenschaft der reellen Zahlen. Es existiere also ein Homomorphismus von $(M, R, \circ)$ nach $(\mathbb{R}, >, +)$. Dann impliziert $(p, q) \in R$, dass $f(p) > f(q)$ und damit $f(p) - f(q) > 0$. Mit der Archimedischen Eigenschaft der reellen Zahlen existiert dann ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n(f(p) - f(q)) > f(s) - f(r)$ für alle $r, s \in M$. Dann aber gilt

$$
\begin{aligned}
n(f(p) - f(q)) > f(s) - f(r) & \Leftrightarrow nf(p) - nf(q) > f(s) - f(r) \\
& \Leftrightarrow nf(p) + f(r) > nf(q) + f(s) \\
& \Leftrightarrow f(np + r) > f(nq + s) \Leftrightarrow (np \circ r, nq \circ s) \in R.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Extensivmessung nach Hölder

Extensive Strukturen

Repräsentation und Eindeutigkeit

Selbstkontrollfragen

Theorem (Repräsentation extensiver Strukturen)

$\mathcal{M} := (M, R, \circ)$ sei ein qualitatives Relationssystem aus einer Menge M, einer Binärrelation R und einer Operation $\circ$ und $\mathcal{N} := (\mathbb{R}, >, +)$ sei ein numerisches Relationssystem. Dann existiert ein Homomorphismus f von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$, also eine Funktion der Form

$$f : M \to \mathbb{R}, m \mapsto f(m) \quad (21)$$

mit den Eigenschaften

$$(m, n) \in R \Leftrightarrow f(m) > f(n) \quad (22)$$

und

$$f(m \circ n) = f(m) + f(n) \quad (23)$$

dann und nur dann, wenn $(M, R, \circ)$ eine extensive Struktur ist.

Bemerkung

- Wir verzichen auf einen Beweis und verweisen auf Roberts and Luce (1968) oder Rossi (2006).

Theorem (Eindeutigkeit der Repräsentation extensiver Strukturen)

Das qualitative Relationssystem $\mathcal{M} := (M, R, \circ)$ sei eine extensive Struktur, $\mathcal{N} := (\mathbb{R}, >, +)$ sei ein numerisches Relationssystem und es sei $f \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Dann ist $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$ eine Verhältnisskala.

Bemerkungen

- Die Klasse der zulässigen Transformationen von f sind also die Ähnlichkeitstransformationen.
- Extensive Strukturen sind also nur bis auf eine Ähnlichkeitstransformation eindeutig repräsentiert.

Repräsentation und Eindeutigkeit

Beweis

Für einen vollständigen Beweis müssten wir nachweisen, dass (1) die Repräsentation regulär ist, (2.1) aus der Tatsache,dass ϕ eine Ähnlichkeitstransformation ist, folgt, dass $\phi \circ f \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ und (2.2), dass aus $\phi \circ f \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ folgt, dass ϕ eine Ähnlichkeitstransformation ist. Für die Skizze eines solchen vollständigen Beweis verweisen auf Roberts (1984), S. 130. Wir begnügen uns hier mit dem Nachweis von (2.1).

ϕ ist eine Ähnlichkeitstransformation $\Rightarrow \phi \circ f \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$

Wir wollen zeigen, dass wenn ϕ von der Form

$$\phi : f(M) \to \mathbb{R}, x \mapsto \phi(x) := \alpha x \text{ mit } \alpha > 0 \tag{24}$$

ist, die Verkettung von ϕ mit dem Homomorphismus f wiederum ein Homomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ ist. Dazu halten wir fest, dass einerseits gilt, dass

$$(m,n) \in R \Leftrightarrow f(m) > f(n) \Leftrightarrow \alpha f(m) > \alpha f(n) \Leftrightarrow \phi(f(m)) > \phi(f(n)) \Leftrightarrow (\phi \circ f)(m) > (\phi \circ f)(n)$$

und dass andererseits gilt, dass

$$\begin{aligned}
(\phi \circ f)(m \circ n) &= \phi(f(m \circ n)) \\
&= \phi(f(m) + f(n))) \\
&= \alpha(f(m) + f(n))) \\
&= \alpha f(m) + \alpha f(n)) \\
&= \phi(f(m)) + \phi(f(n)) \\
&= (\phi \circ f)(m) + (\phi \circ f)(n).
\end{aligned} \tag{25}$$

Damit erfüllt $\phi \circ f$ aber die definierenden Eigenschaften eines Homomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$.

Extensivmessung nach Hölder

Extensive Strukturen

Repräsentation und Eindeutigkeit

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie das zentrale Charakteristikum der Extensivmessung.
2. Geben Sie jeweils drei Beispiele für Extensivmessungen in der Physik und in der Psychologie.
3. Definieren Sie den Begriff der strengen einfachen Ordnung.
4. Definieren Sie den Begriff der Gruppe.
5. Geben Sie das Theorem zur Archimedischen Eigenschaft der reellen Zahlen wieder.
6. Definieren Sie den Begriff der Archimedisch geordneten Gruppe.
7. Geben Sie Hölders Theorem wieder.
8. Erläutern Sie die Motivation zur Formulierung des Begriffs der extensiven Struktur.
9. Gegeben Sie das Theorem zur Repräsentation extensiver Strukturen an.
10. Geben Sie das Theorem zur Repräsentation extensiver Strukturen wieder.

Referenzen

Campbell, N. R., and H. Jeffreys. 1938. "Symposium: Measurement and Its Importance for Philosophy." *Aristotelian Society Supplementary Volume* 17 (1): 121–50. https://doi.org/10.1093/aristoteliansupp/17.1.121.

Hölder, Otto. 1901. "Die Axiome Der Quantität Und Die Lehre Vom Maß." *Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Math. Phys.* C1 (53): 1–64.

Krantz, David H., and Patrick Suppes, eds. 1971. *Foundations of Measurement Vol. I*. New York: Academic Press.

Michell, Joel. 1997. "Quantitative Science and the Definition of Measurement in Psychology." *British Journal of Psychology* 88 (3): 355–83. https://doi.org/10.1111/j.2044-8295.1997.tb02641.x.

———. 2021. "Representational Measurement Theory: Is Its Number Up?" *Theory & Psychology* 31 (1): 3–23. https://doi.org/10.1177/0959354320930817.

Michell, Joel, Catherine Ernst, and Otto Ludwig Hölder. 1996. "The Axioms of Quantity and the Theory of Measurement," 18.

Mundy, Brent. 1987. "The Metaphysics of Quantity." *Philosophical Studies* 51 (1): 29–54. https://doi.org/10.1007/BF00353961.

Roberts, Fred S. 1984. *Measurement Theory with Applications to Decisionmaking, Utility, and the Social Sciences*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications ; Section, Mathematics and the Social Sciences, v. 7. Cambridge [Cambridgeshire] ; New York, NY, USA: Cambridge University Press.

Roberts, Fred S., and R. Duncan Luce. 1968. "Axiomatic Thermodynamics and Extensive Measurement." *Synthese* 18 (4): 311–26. https://doi.org/10.1007/BF00484975.

Rossi, Giovanni Battista. 2006. "A Probabilistic Theory of Measurement." *Measurement* 39 (1): 34–50. https://doi.org/10.1016/j.measurement.2005.10.001.

Stevens, S. S. 1946. "On the Theory of Scales of Measurement." *Science, New Series* 103 (2684): 677–80. http://www.jstor.org/stable/1671815.

Swoyer, Chris. 1987. "The Metaphysics of Measurement." In *Measurement, Realism and Objectivity*, edited by John Forge, 235–90. Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-3919-6_8.