Psychologische Forschungsmethoden

BSc Philosophie-Neurowissenschaften-Kognition WiSe 2022/23

BSc Psychologie WiSe 2022/23

Prof. Dr. Dirk Ostwald

Vorläufige Vorlesungsübersicht

Datum	Einheit	Thema
13.10.2022	Formalia	(0) Formalia
13.10.2022	Psychologische Wissenschaft	(1) Wissenschaft
20.10.2022	Psychologische Wissenschaft	(2) Grundlagenorientierte psychologische Wissenschaft
27.10.2022	Psychologische Wissenschaft	(2) Anwendungsorientierte psychologische Wissenschaft
03.11.2022	Psychologische Wissenschaft	(3) Psychologische Daten
10.11.2022	Messtheorie	(4) Einführung Messtheorie
17.11.2022	Messtheorie	(5) Relationen
24.11.2022	Messtheorie	(6) Grundprobleme der Messtheorie
01.12.2022	Messtheorie	(7) Skalenarten
08.12.2022	Messtheorie	(8) Ordinalmessung
15.12.2022	Messtheorie	(9) Extensivmessung
05.01.2023	Messtheorie	(10) Differenzmessung
12.01.2023	Messtheorie	(11) Bedeutsamkeit
19.01.2023	Messtheorie	(12) Psychophysik
26.01.2023	Messtheorie	(13) Likertskalen
29.03.2023	Klausurtermin	12:00 – 13:00 Uhr, G16 – H5
Juli 2023	Klausurwiederholungstermin	

(6) Grundprobleme der Messtheorie

Grundidee des Messens

Homomorphismen und Skalen

Repräsentation, Eindeutigkeit, Bedeutsamkeit

Selbstkontrollfragen

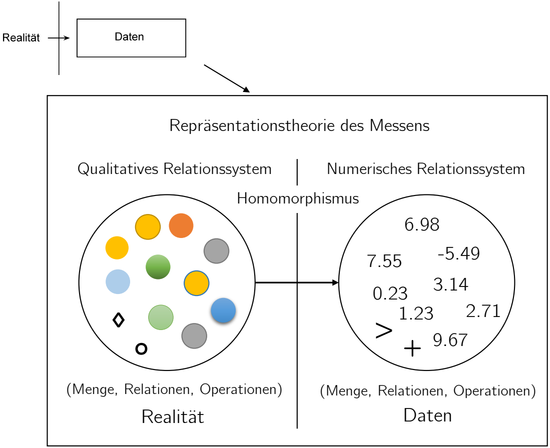
Grundidee des Messens

Homomorphismen und Skalen

Repräsentation, Eindeutigkeit, Bedeutsamkeit

Selbstkontrollfragen

Grundidee des Messens



Die Grundidee des Messens ist es, Eigenschaften von Objekten Zahlen so zuzuweisen, dass die Relationen der Eigenschaften der Objekte sowie Operationen mit Objekteigenschaften im Bereich der Zahlen erhalten bleiben.

Beispiel (1) Messen von Entscheidungsoptionspräferenzen

Messen der Entscheidungsoptionspräferenzen eines Agenten bedeutet, den Entscheidungsoptionen Zahlen so zuzuordnen, dass die qualitative Relation "Entscheidungsoption m wird präferiert über Entscheidungsoption n" in der Realität im Bereich der Zahlen erhalten bleibt.

Sei M die Menge von Entscheidungsoptionen und sei R die Entscheidungsoptionspräferenzrelation, d.h. für $m, n \in M$ gelte

$$m \text{ wird präferiert über } n \Leftrightarrow (m, n) \in R. \tag{1}$$

Dann möchte man bei der Messung von Entscheidungsoptionspräferenzen m und n so mithilfe einer Funktion f Zahlen zuordnen, dass gilt

$$m \text{ wird präferiert über } n \Leftrightarrow (m, n) \in R \Leftrightarrow f(m) > f(n). \tag{2}$$

Eine solche Funktion heißt dann *Nutzenfunktion (utility function)*.

Das Messen von Entscheidungsoptionspräferenzen wird in der Folge unser Beispiel für den Begriff der *Ordinalmessung* und den zugehörigen Begriff der *Ordinalskala* sein.

Beispiel (2) Messen der Masse von Objekten

Messen der Masse eines Objektes bedeutet, den Objekten Zahlen so zuzuordnen, dass die qualitative Relation "Objekt m ist schwerer als Objekt n" in der Realität im Bereich der Zahlen erhalten bleibt. Weiterhin möchte man beim Messen der Masse eines Objektes auch sicherstellen, dass der Messprozess additiv ist, d.h. dass die Masse der physischen Kombination zweier Objekte der Summation der Massen der einzelnen Objekte entspricht.

Sei M die Menge von Objekten, sei R die Gewichtsvergleichrelation, d.h. für $m, n \in M$ gelte

$$m \text{ ist schwerer als } n \Leftrightarrow (m, n) \in R \tag{3}$$

und $\circ$ sei die Operation des physischen Kombinierens zweier Objekte, d.h. für $m, n \in M$ gelte

$$m \text{ wird kombiniert mit } n \Leftrightarrow m \circ n. \tag{4}$$

Dann möchte man bei der Messung der Masse von Objekten m und n so mit Hilfe einer Funktion f Zahlen zuordnen, dass gilt

$$m \text{ ist schwerer als } n \Leftrightarrow (m, n) \in R \Leftrightarrow f(m) > f(n) \tag{5}$$

und

$$f(m \text{ wird kombiniert mit } n) \Leftrightarrow f(m \circ n) = f(m) + f(n). \tag{6}$$

Eine solche Funktion heißt *Waage*.

Das Messen der Masse von Objekten wird in der Folge unser Beispiel für den Begriff der *Extensivmessung* und den zugehörigen Begriff der *Verhältnisskala* sein.

Grundidee des Messens

Homomorphismen und Skalen

Repräsentation, Eindeutigkeit, Bedeutsamkeit

Selbstkontrollfragen

Definition (Homomorphismus)

$\mathcal{M} := (M, R_1, ..., R_p, \circ_1, ..., \circ_q)$ und $\mathcal{N} := (N, \tilde{R}_1, ..., \tilde{R}_p, \tilde{\circ}_1, ..., \tilde{\circ}_q)$ seien zwei Relationssysteme gleichen Typs. Dann heißt eine Funktion $f : M \to N$ ein *Homomorphismus von* $\mathcal{M}$ *nach* $\mathcal{N}$, wenn f folgende Eigenschaften hat:

(1) Für alle $i = 1, ..., p$ und alle $m_1, ..., m_{r_i} \in M$ gilt

$$(m_1, ..., m_{r_i}) \in R_i \Leftrightarrow (f(m_1), ..., f(m_{r_i})) \in \tilde{R}_i. \tag{7}$$

(2) Für alle $i = 1, ..., q$ und alle $m, n \in M$ gilt

$$f(m \circ_i n) = f(m) \tilde{\circ}_i f(n). \tag{8}$$

Wenn zwischen zwei Relationssystemen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ gleichen Typs ein Homomorphismus existiert, dann heißen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ *homomorph*.

Definition (Isomorphismus)

Ein injektiver Homomorphismus heißt *Isomorphismus*. Wenn zwischen zwei Relationssystemen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ gleichen Typs ein Isomorphismus existiert, dann heißen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ *isomorph*.

Homomorphismen und Skalen

Bemerkungen

- Die Definition eines Homomorphismus basiert auf der Existenz zweier Relationssysteme gleichen Typs.
- In der Messtheorie ist $\mathcal{M}$ meist ein qualitatives Relationssystem und $\mathcal{N}$ ein numerisches Relationssystem.
- Eigenschaft (1) besagt, dass wenn ein r_i-Tupel von Elementen in M ein Element der $i$ten Relation R_i auf M ist, dann soll das r_i-Tupel der durch f transformierten Elemente ein Element der $i$ten Relation $\tilde{R}_i$ auf N sein und umgekehrt.
- Eigenschaft (2) besagt, dass für $i = 1, ..., q$ die durch f transfomierte $i$te Verknüpfung zweier Elemente aus M auf M gleich der $i$ten Verknüpfung der durch f transfomierten Elemente aus M auf N sein soll.
- Für einen Isomorphismus gilt neben den Eigenschaften (1) und (2) noch, dass f injektiv ist, also dass für $m, n \in M$ gilt, dass

$$m \neq n \Rightarrow f(m) \neq f(n) \text{ bzw. } f(m) = f(n) \Rightarrow m = n. \tag{9}$$

- Die Definition eines Homomorphismus ist für endlich viele Relationen und Operationen auf Mengen formuliert.
- Im Fall des Messen von Entscheidungsoptionspräferenzen betrachtet man $\mathcal{M} = (M, R)$ und $\mathcal{N} = (\mathbb{R}, >)$ und fragt mit $p := 1, r_1 := 2$ und $q := 0$ dementsprechend nach einer Funktion f, für die gilt

$$(m, n) \in R \Leftrightarrow f(m) > f(n). \tag{10}$$

- Im Fall des Messen der Masse von Objekten betrachtet man $\mathcal{M} = (M, R, \circ)$ und $\mathcal{N} = (\mathbb{R}, >, +)$ und fragt mit $p := 1, r_1 := 2$ und $q := 1$ dementsprechend nach einer Funktion f, für die gilt

$$(m, n) \in R \Leftrightarrow f(m) > f(n) \text{ und } f(m \circ n) = f(m) + f(n). \tag{11}$$

Homomorphismen und Skalen

Beispiel

Es sei $\mathcal{M} := (M, R)$ das $(2, 0)$ Relationssystem mit $M := \{a, b, c, d\}$ und

$$R := \{(a, b), (b, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, d)\} \tag{12}$$

Weiterhin sei $\mathcal{N} := (\mathbb{R}, >)$ ein numerisches Relationssystem.

Dann ist

$$f : M \to \mathbb{R}, m \mapsto f(m) \text{ mit } f(a) := 4, f(b) := 3, f(c) := 2, f(d) := 1 \tag{13}$$

ein Homomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$, weil

$$\begin{aligned}
(a, b) \in R \Leftrightarrow a \diamond b \Leftrightarrow f(a) > f(b) \Leftrightarrow 4 > 3 \Leftrightarrow (4, 3) \in > \\
(b, c) \in R \Leftrightarrow b \diamond c \Leftrightarrow f(b) > f(c) \Leftrightarrow 3 > 2 \Leftrightarrow (3, 2) \in > \\
(a, c) \in R \Leftrightarrow a \diamond c \Leftrightarrow f(a) > f(c) \Leftrightarrow 4 > 2 \Leftrightarrow (4, 2) \in > \\
(a, d) \in R \Leftrightarrow a \diamond d \Leftrightarrow f(a) > f(d) \Leftrightarrow 4 > 1 \Leftrightarrow (4, 1) \in > \\
(b, d) \in R \Leftrightarrow b \diamond d \Leftrightarrow f(b) > f(d) \Leftrightarrow 3 > 1 \Leftrightarrow (3, 1) \in > \\
(c, d) \in R \Leftrightarrow c \diamond d \Leftrightarrow f(c) > f(d) \Leftrightarrow 2 > 1 \Leftrightarrow (2, 1) \in >
\end{aligned} \tag{14}$$

Für die hier definierten Relationssysteme $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}$ existiert also ein Homomorphismus.

Es ist dementsprechend leicht einzusehen, dass auch

$$g : M \to \mathbb{R}, m \mapsto g(m) \text{ mit } g(a) := 10, g(b) := 4, g(c) := 2, g(d) := 0 \tag{15}$$

ein Homomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ ist. Für die hier definierten Relationssysteme $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}$ existiert also sogar mehr als nur ein Homomorphismus.

Homomorphismen und Skalen

Definition (Skala)

$\mathcal{M}$ sei ein qualitatives Relationssystem mit Menge M, $\mathcal{N}$ sei ein numerisches Relationssystem und

$$\mathcal{H}(\mathcal{M},\mathcal{N}) := \{h : M \to \mathbb{R} | h \text{ ist ein Homomorphismus von } \mathcal{M} \text{ nach } \mathcal{N}\} \tag{16}$$

sei die Menge aller Homomorphismen von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$. Dann heißt für eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ das Tripel $(\mathcal{M},\mathcal{N},f)$ *Skala*, wenn $f \in \mathcal{H}(\mathcal{M},\mathcal{N})$.

Bemerkungen

- Die hier gewählte Definition entspricht der Definition der *numerischen Skala* in Roberts (1984).
- Wenn $\mathcal{H}(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \emptyset$, dann existiert kein Homomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$.
- Wenn $|\mathcal{H}(\mathcal{M},\mathcal{N})| > 1$, dann existieren mehr als ein Homomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$.
- Der Begriff "Skala" wird manchmal auch nur nur für einen Homomorphimus verwendet.
- In der Psychologie wird der Begriff "Skala" auch oft als Synonym für "Fragebogen" verwendet.

Grundidee des Messens

Homomorphismen und Skalen

Repräsentation, Eindeutigkeit, Bedeutsamkeit

Selbstkontrollfragen

Definition (Repräsentationsproblem der Messtheorie)

Gegeben seien ein qualitatives Relationssystem $\mathcal{M}$ und ein numerisches Relationssystem $\mathcal{N}$. Dann besteht das *Repräsentationsproblem der Messtheorie* darin, notwendige und hinreichende Eigenschaften von $\mathcal{M}$ für die Existenz eines Homomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ anzugeben.

Bemerkungen

- Für ein gegebenes numerisches Relationssystem $\mathcal{N}$ fragt man also, wie ein qualitatives Relationssystem $\mathcal{M}$ beschaffen sein muss, damit ein Homomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ existiert.
- Messtheoretische Theoreme, die besagen, dass bestimmte Eigenschaften von $\mathcal{M}$ für die Existenz eines Homomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ notwendig und hinreichend sind, heißen *Repräsentationstheoreme*.
- Im Idealfall ist der Beweis eines Repräsentationstheorems *konstruktiv*, d.h., neben dem Beweis der bloßen Existenz des Homomorphismus gibt der Beweis auch die funktionale Form des Homomorphismus an und definiert damit den Messvorgang.
- Die notwendigen und hinreichenden Eigenschaften von $\mathcal{M}$ für die Existenz eines Homomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ werden traditionell auch *Axiome* von $\mathcal{M}$ genannt.
- In den Einheiten (8) Ordinalmessung, (9) Extensivmessung und (10) Differenzmessung addressieren wir die jeweiligen Repräsentationsprobleme.

Repräsentation, Eindeutigkeit, Bedeutsamkeit

Notwendige und hinreichende Eigenschaften

Wir erinnern an die Bedeutung *notwendiger und hinreichender Eigenschaften (Bedingungen)*.

Eigenschaften B sind eine notwendige Bedingung für eine Aussage K, wenn sie zwingend erfüllt sein müssen, wenn K erfüllt ist. Man schreibt dafür $K \Rightarrow B$, "aus K folgt B". Gemahlene Bohnen sind eine notwendige Bedingung beim Kochen von Kaffee, d.h. wenn Kaffee gekocht wird, existieren gemahlene Bohnen. Hinreichend für das Kochen von Kaffee sind gemahlene Bohnen aber nicht, es braucht ja z.B. auch noch Wasser und Hitze. Bei der Frage nach Nullstellen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine notwendige Bedingung für das Vorliegen einer Extremstelle in x, dass $f'(x) = 0$. Wenn also f an der Stelle x eine Extremstelle hat, dann gilt $f'(x) = 0$. Hinreichend für eine Extremstelle von f in x ist $f'(x) = 0$ allerdings nicht, denn es gilt auch $f'(x) = 0$ in Sattelpunkten. Im Kontext der messtheoretischen Repräsentation sind notwendige Eigenschaften von $\mathcal{M}$ solche Eigenschaften von $\mathcal{M}$, die aus der Existenz eines Homomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ folgen.

Eigenschaften B sind eine hinreichende Bedingung für eine Aussage K, wenn aus B zwingend folgt, dass K erfüllt ist. Man schreibt dafür $B \Rightarrow K$, "aus B folgt K". Nassfutter zu fressen ist eine hinreichende Bedingung für die Sättigung des Katers, d.h. wenn der Kater Nassfutter gefressen hat, ist er satt. Allerdings ist Nassfutter zu fressen keine notwendige Bedingung für die Sättigung des Katers, denn auch wenn der Kater Trockenfutter gefressen hat, ist er satt. Bei der Frage nach Nullstellen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind hinreichende Bedingungen für das Vorliegen einer Extremstelle in x, dass $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$. Aus $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$ folgt zwingend, dass f in x eine Extremstelle hat. Im Kontext der messtheoretischen Repräsentation sind hinreichende Eigenschaften von $\mathcal{M}$ solche Eigenschaften von $\mathcal{M}$, aus denen die Existenz eines Homomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ folgen.

Hinreichende und notwendige Eigenschaften B von $\mathcal{M}$ für die Existenz K eines Homomorphismus sind also ein Minmalset an Eigenschaften von $\mathcal{M}$, die für die Existenz eines Homomorphismus genügen, so dass gilt

$$B \Rightarrow K \text{ und } K \Rightarrow B, \text{ also } B \Leftrightarrow K. \tag{17}$$

Definition (Eindeutigkeitsproblem der Messtheorie)

Gegeben seien ein qualitatives Relationssystem $\mathcal{M}$, ein numerisches Relationssystem $\mathcal{N}$ und ein Homomorphismus f von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$. Dann besteht das *Eindeutigkeitsproblem der Messtheorie* darin, zu bestimmen, ob dieser Homomorphismus der einzige Homomorphismus ist, der zwischen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ existiert.

Bemerkungen

- Die Antworten auf Eindeutigkeitsprobleme legen die sogenannten *Skalenarten* fest.
- Die Antworten auf Eindeutigkeitsprobleme legen die Grundlage für den Begriff der *Bedeutsamkeit*.
- In Einheit (7) Skalenarten befassen wir uns mit dem Eindeutigkeitsproblem der Messtheorie.

Definition (Bedeutsamkeit)

$\mathcal{M}$ sei ein qualitatives Relationssystem und $\mathcal{N}$ sei ein numerisches Relationssystem. Dann heißt eine Aussage bezüglich $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ *bedeutsam*, wenn ihr Wahrheitsgehalt unverändert bleibt, wenn eine beliebige Skala $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$ durch eine andere Skala $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, g)$ ersetzt wird.

Bemerkungen

- Mithilfe der Theorie der Skalenarten kann der Begriff der Bedeutsamkeit klarer mithilfe des Begriffs der *zulässigen Skalentransformationen* formuliert werden, welchen wir in Einheit (7) Skalenarten einführen.
- Der Begriff der Bedeutsamkeit wird manchmal herangezogen, um zu argumentieren, dass bestimmte Datenanalysen bei bestimmten Daten "erlaubt" und andere "nicht erlaubt sind". Wir werden diese Aspekte in den Einheit (11) Bedeutsamkeit und (12) Likertskalen näher beleuchten und kritisch diskutieren.
- Zum Einstieg geben wir im Folgenden zwei Beispiele für intuitiv bedeutsame und nicht bedeutsame Aussagen.

Repräsentation, Eindeutigkeit, Bedeutsamkeit

Beispiele (1) Bedeutsame Aussagen beim Messen der Masse von Objekten

Die Aussage "Objekt m ist doppelt so schwer wie Objekt n" ist intuitiv bedeutsam, da unabhängig davon, ob in Gramm, Kilogramm (1 kg = 1000 g), oder angloamerikanischen Pfund (1 lb = 0.453 kg) gemessen wird, die Aussage wahr bleibt.

Seien zum Beispiel den Objekten m und n durch die Gramm-Skala die Gewichte 400 g und 200 g zugeordnet. Dann gilt

$$\frac{\text{Gewicht von } m}{\text{Gewicht von } n} = 2 \to \frac{400 \text{ g}}{200 \text{ g}} = 2 \to \frac{0.4 \text{ kg}}{0.2 \text{ kg}} = 2 \to \frac{0.88 \text{ lb}}{0.44 \text{ lb}} = 2. \tag{18}$$

Beispiel (2) Nicht bedeutsame Aussagen beim Messen der Temperatur von Objekten

Die Aussage "Objekt m ist doppelt so warm wie Objekt n" ist intuitiv nicht bedeutsam, da abhängig davon, ob in Grad Celsius (T_C), Fahrenheit ($\text{T}_\text{F} = \frac{9}{5}\ \text{T}_\text{C} + 32$), oder Kelvin ($\text{T}_\text{K} = \text{T}_\text{C} + 275.15$) gemessen wird, die Aussage falsch wird.

Seien zum Beispiel den Objekten m und n durch die Celsius-Skala die Temperaturen 40°C und 20°C zugeordnet. Dann gilt

$$\frac{\text{Temperatur von } m}{\text{Temperatur von } n} = 2 \to \frac{40^\circ \text{C}}{20^\circ \text{C}} = 2 \to \frac{104^\circ \text{ F}}{68^\circ \text{ F}} = 1.52 \neq 2 \to \frac{313.15 \text{ K}}{293.15 \text{ K}} = 1.06 \neq 2. \tag{19}$$

Das Messen von Temperatur von Objekten wird in der Folge unser Arbeitsbeispiel für den Begriff der *Differenzmessung* und dem zugehörigen Begriff der *Intervallskala* sein.

Grundidee des Messens

Homomorphismen und Skalen

Repräsentation, Eindeutigkeit, Bedeutsamkeit

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie die Grundidee des Messens.
2. Erläutern Sie das Messen von Entscheidungsoptionspräferenzen.
3. Erläutern Sie das Messen der Masse von Objekten.
4. Geben Sie die Definition eines Homomorphismus wieder.
5. Geben Sie die Definition eines Isomorphismus wieder.
6. Geben Sie die Definition einer Skala wieder.
7. Definieren Sie das Repräsentationsproblem der Messtheorie.
8. Erläutern Sie die Begriffe der notwendigen und hinreichenden Eigenschaften eines qualitativen Relationssystems für die Existenz eine Homomorphismus.
9. Definieren Sie das Eindeutigkeitsproblem der Messtheorie.
10. Definieren den messtheoretischen Begriff der Bedeutsamkeit.
11. Warum ist die Aussage "Objekt m ist doppelt so schwer wie Objekt n" intuitiv bedeutsam, die Aussage "Objekt m ist doppelt so warm wie Objekt n" dagegehn intuitiv nicht bedeutsam?

Referenzen

Roberts, Fred S. 1984. *Measurement Theory with Applications to Decisionmaking, Utility, and the Social Sciences*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications ; Section, Mathematics and the Social Sciences, v. 7. Cambridge [Cambridgeshire] ; New York, NY, USA: Cambridge University Press.