Psychologische Forschungsmethoden

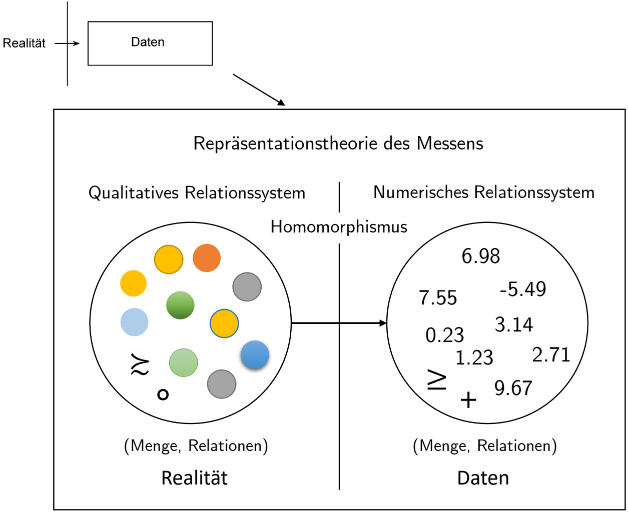
BSc Philosophie-Neurowissenschaften-Kognition WiSe 2022/23

BSc Psychologie WiSe 2022/23

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(5) Relationen

Überblick



Realität
Daten
Repräsentationstheorie des Messens
Qualitatives Relationssystem
Numerisches Relationssystem
Homomorphismus
6.98
7.55
-5.49
0.23
3.14
1.23
2.71
9.67
(Menge, Relationen)
(Menge, Relationen)
Realität
Daten

Definition

Ausgewählte Eigenschaften

Operationen

Relationssysteme

Selbstkontrollfragen

Definition

Ausgewählte Eigenschaften

Operationen

Relationssysteme

Selbstkontrollfragen

Definition (Kartesische Produkte)

M und N seien zwei Mengen. Dann ist das *Kartesische Produkt der Mengen* M *und* N die Menge aller geordneten Tupel (m,n) mit $m \in M$ und $n \in N$, formal

$$M \times N := \{(m,n) | m \in M, n \in N\}. \tag{1}$$

Das Kartesische Produkt einer Menge M mit sich selbst wird bezeichnet mit

$$M^2 := M \times M \tag{2}$$

Seien weiterhin $M_1, ..., M_n$ Mengen. Dann ist das *Kartesische Produkt der Mengen* $M_1, ..., M_n$ die Menge aller geordneten n-Tupel $(m_1, ..., m_n)$ mit $m_i \in m_i$ für $i = 1, ..., n$, formal

$$\prod_{i=1}^{n} M_i := M_1 \times \cdots \times M_n := \{(m_1, ..., m_n) | m_i \in M_i \text{ für } i = 1, ..., n\}. \tag{3}$$

Das n-fache Kartesische Produkt einer Menge M mit sich selbst wird bezeichnet mit

$$M^n := \prod_{i=1}^{n} M := \{(m_1, ..., m_n) | m_i \in M \text{ für } i = 1, ..., n\}. \tag{4}$$

Beispiele

(1) Es sei $M := \{1, 2\}$ und $N := \{1, 2, 3\}$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
M \times N &:= \{(m, n) | m \in \{1, 2\}, n \in \{1, 2, 3\}\} \\
&:= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

(2) Es seien $M_1 := \{a, b\}$, $M_2 := \{c, d\}$ und $M_3 := \{e, f\}$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{3} M_i &:= M_1 \times M_2 \times M_3 \\
&:= \{(m_1, m_2, m_3) | m_1 \in M_1, m_2 \in M_2, m_3 \in M_3\} \\
&:= \{(a, c, e), (b, c, e), (a, d, e), (b, d, e), (a, c, f), (b, c, f), (a, d, f), (b, d, f)\}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Bemerkungen

- Offenbar gilt $|M_1 \times \cdots \times M_n| := \prod_{i=1}^{n} |M_i|$.
- In der Definition von Mengen ist die Reihenfolge der Elemente unerheblich, bei n-Tupeln nicht.
- Für Mengen gilt z.B. $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ oder $\{a, c, e\} = \{c, e, a\}$.
- Für geordnete Tupel gilt dagegen z.B. $(1, 2) \neq (2, 1)$ und $(a, c, e) \neq (c, e, a)$.

Definition (n-stellige Relation)

Gegeben seien n Mengen $M_1, ..., M_n$. Dann ist eine *n-stellige Relation R auf $M_1, ..., M_n$* definiert als eine Teilmenge des Kartesischen Produkts von $M_1, ..., M_n$,

$$R \subseteq \prod_{i=1}^{n} M_i := M_1 \times \cdots \times M_n := \{(m_1, ..., m_n) | m_i \in M_i, i = 1, ..., n\}. \tag{7}$$

Bemerkungen

- Eine n-stellige Relation ist eine Menge von geordneten n-Tupeln.
- Für zwei Mengen M_1 und M_2 ist eine 2-stellige Relation R eine Menge von geordneten Paaren.

$$R = \{(m_1, m_2) | m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\} \subset M_1 \times M_2. \tag{8}$$

- Für drei Mengen M_1, M_2 und M_3 ist eine 3-stellige Relation R eine Menge von geordneten Tripeln

$$R = \{(m_1, m_2, m_3) | m_1 \in M_1, m_2 \in M_2, m_3 \in M_3\} \subset M_1 \times M_2 \times M_3. \tag{9}$$

- Die Mengen $M_1, ..., M_n$ sind nicht notwendig verschieden.
- Eine zweistellige Relation auf $M_1 \times M_2$ mit $M_1 = M_2$, also $M_1 \times M_2 = M^2$ heißt *Binärrelation auf M*.
- Wir betrachten in der Folge Binärrelationen genauer.

Definition (Binärrelation)

M sei eine Menge. Dann heißt eine Teilmenge R des Kartesischen Produkts $M \times M$ eine *Binärrelation auf* M. Wenn für ein (geordnetes Paar) $(m,n) \in M \times M$ gilt, dass $(m,n) \in R$ ist, so schreiben wir $m \diamond n$ und bezeichnen die Binärrelation mit $\diamond$.

Bemerkungen

- Es gilt $(m,n) \in R \Leftrightarrow m \diamond n$.

Definition

Beispiel (1)

Es sei $M := \{a, b, c\}$ eine Menge. Dann ist

$$M \times M = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\} \tag{10}$$

Jede Teilmenge von $M \times M$ ist eine Binärrelation auf M.

Zum Beispiel ist also

$$R := \{(a,a),(b,b),(c,c)\} \tag{11}$$

eine Binärrelation auf M. Man schreibt hier also $a \diamond a$, $b \diamond b$, $c \diamond c$, aber auch zum Beispiel $a \not\diamond b$.

Eine andere Relation auf M ist

$$R := \{(a,b),(b,c),(a,c)\} \tag{12}$$

Man schreibt hier entsprechend $a \diamond b$, $b \diamond c$, $a \diamond c$, aber zum Beispiel auch $a \not\diamond a$.

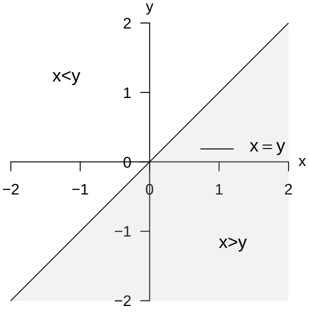
Definition

Beispiel (2)

Es sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Dann ist die Menge definiert durch

$$R := \{(x,y)|x \geq y \text{ und } x,y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2 \tag{13}$$

eine Binärrelation auf $\mathbb{R}$. Wir nennen diese Relation die $\geq$ (größer-gleich) Relation.



$$\{(x,y)|x \geq y \text{ und } x,y \in \mathbb{R}\} = - \cup \blacksquare$$

Definition

Ausgewählte Eigenschaften

Operationen

Relationssysteme

Selbstkontrollfragen

Definition (Reflexivität)

Eine Binärrelation R auf eine Menge M heißt *reflexiv*, wenn für jedes $m \in M$ gilt, dass $(m, m) \in R$ ist, wenn also $m \diamond m$ gilt.

Bemerkungen und Beispiele

- Die $\geq$ Relation auf $\mathbb{R}$ is reflexiv, weil für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $x \geq x$.
- Für $M := \{a, b\}$ ist
  $$R := \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\} \tag{14}$$
  eine reflexive Relation auf M, weil für $a \in M$ und $b \in M$ gilt, dass (a, a) und (b, b) in R sind.
- Für $M := \{a, b\}$ ist
  $$R := \{(a, a), (a, b), (b, a)\} \tag{15}$$
  keine reflexive Relation auf M, weil $(b, b) \notin R$.

Definition (Symmetrie)

Eine Binärrelation R auf einer Menge M heißt *symmetrisch*, wenn für alle $(m, n) \in R$ folgt, dass auch $(n, m) \in R$ ist, wenn also aus $m \diamond n$ folgt, dass $n \diamond m$ gilt.

Bemerkungen und Beispiele

- Die $\geq$ Relation auf $\mathbb{R}$ ist nicht symmetrisch, weil aus $x \geq y$ nicht notwendigerweise folgt, dass $y \geq x$: es kann ja auch $x > y$ gelten, dann gilt $y \geq x$ aber nicht.
- Für $M := \{a, b\}$ ist

$$R := \{(a, b), (b, a)\} \tag{16}$$

  eine symmetrische Relation auf M, weil

$$\begin{aligned} (a, b) \in R &\Rightarrow (b, a) \in R \\ (b, a) \in R &\Rightarrow (a, b) \in R \end{aligned} \tag{17}$$

- Für $M := \{a, b\}$ ist

$$R := \{(a, a), (a, b), (b, b)\} \tag{18}$$

  keine symmetrische Relation auf M, weil $(a, b) \in R$, aber $(b, a) \notin R$.

Definition (Transitivität)

Eine Binärrelation R auf einer Menge M heißt *transitiv*, wenn für alle $m, n, p \in M$ gilt, dass aus $(m, n) \in R$ und $(n, p) \in R$ folgt, dass $(m, p) \in R$ ist, wenn also aus $m \diamond n$ und $n \diamond p$ folgt, dass $m \diamond p$ gilt.

Beispiele

- Die $\geq$ Relation auf $\mathbb{R}$ ist transitiv, denn aus $x \geq y$ und $y \geq z$ folgt, dass $x \geq z$.
- Auf $M := \{a, b, c\}$ ist
$$R := \{(a, b), (b, c), (a, c)\} \tag{19}$$
eine transitive Relation, weil neben $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ auch $(a, c) \in R$ gilt.
- Für $M := \{a, b, c\}$ ist
$$R := \{(a, b), (b, c)\} \tag{20}$$
keine transitive Relation auf M, weil trotz $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ nicht $(a, c) \in R$ gilt.

Ausgewählte Eigenschaften

Definition (Irreflexivität)

Eine Binärrelation R auf eine Menge M heißt *irreflexiv*, wenn für jedes $m \in M$ gilt, dass $(m, m) \notin R$ ist, wenn also $m \not R m$ gilt.

Bemerkungen und Beispiele

- Die $>$ Relation auf $\mathbb{R}$ ist irreflexiv, denn für kein $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $x > x$.
- Für $M := \{a, b\}$ ist
$$R := \{(a, b), (b, a)\} \tag{21}$$
eine irreflexive Relation auf M, weil für $a \in M$ und $b \in M$ gilt, dass $(a, a) \notin R$ und $(b, b) \notin R$ sind.
- Irreflexiv und nicht reflexiv sind nicht identisch: eine Relation ist schon dann nicht reflexiv, wenn es nur ein $m \in M$ mit $(m, m) \notin R$ gibt, allerdings ist sie nur dann irreflexiv, wenn dies tatsächlich für alle $m \in M$ gilt.
- Sei zum Beispiel $M := \mathbb{R}^2$ und
$$R := \{(x, y) | y = x^2\} \tag{22}$$
Dann gilt $(1, 1) \in R$, weil $1 = 1^2$, aber $(2, 2) \notin R$, weil $2 \neq 2^2$. Also ist R auf $\mathbb{R}^2$ weder reflexiv noch irreflexiv.

Definition (Negative Transitivität)

Eine Binärrelation R auf einer Menge M heißt *negativ transitiv*, wenn für alle $m, n \in R$ gilt, dass aus $(m, n) \notin R$ und $(n, p) \notin R$ folgt, dass $(m, p) \notin R$ ist, wenn also aus $m \not\phi n$ und $n \not\phi p$ folgt, dass $m \not\phi p$ gilt.

Beispiele

- Die $>$ Relation auf $\mathbb{R}$ ist negativ transitiv, denn aus $x \not> y$ (also $x \le y$) und $y \not> z$ (also $y \le z$), folgt $x \le z$, also $x \not> z$.
- Auf $M := \{a, b, c\}$ ist

$$R := \{(a, b), (b, c), (a, c)\} \tag{23}$$

  negativ transitiv, denn hier folgt zum Beispiel aus $(c, b) \notin R$ und $(b, a) \notin R$, dass $(c, a) \notin R$. Zum vollständigem Nachweis der negativen Transitität müsste dies für alle möglichen relevanten Paare nachgewiesen werden.
- Dagegen ist auf $M := \{a, b, c\}$

$$R := \{(a, b), (b, c), (c, a)\} \tag{24}$$

  nicht negativ transitiv, denn trotz $(b, a) \notin R$ und $(a, c) \notin R$ gilt hier $(b, c) \in R$.

Definition

Ausgewählte Eigenschaften

Operationen

Relationssysteme

Selbstkontrollfragen

Definition (Relationsdefinition von Funktionen)

D und Z seien Mengen. Eine Binärrelation f auf $D \times Z$ heißt *Funktion (oder Abbildung) von D nach Z*, wenn f folgende Eigenschaften hat:

(1) Für alle $x \in D$ gibt es ein $y \in Z$, so dass $(x, y) \in f$.

(2) Wenn $(x, y) \in f$ und $(x, y') \in f$ sind, so folgt $y = y'$.

Bemerkungen

- Eine Funktion wird hier betrachtet als eine Menge von geordneten Paaren

$$f := \{(x, y) | x \in D, y \in Z\} \subseteq D \times Z \tag{25}$$

- Eigenschaft (1) besagt, dass eine Funktion jedem Element in D mindestens ein Element in Z zuordnet.
- Eigenschaft (2) besagt, dass eine Funktion jedem Element in D höchstens ein Element in Z zuordnet.
- Zusammen besagen (1) und (2) also, dass eine Funktion jedem $x \in D$ genau ein $y \in Z$ zuordnet.
- Unsere Notation von Funktionen bleibt von der Relationsdefinition von Funktionen unberührt, wir schreiben weiterhin $f : D \to Z$ dafür, dass f eine Funktion (Abbildung) von D nach Z ist und bezeichnen das zu $x \in D$ eindeutig bestimmte $y \in Z$ als $f(x) := y$.
- Die Relationsdefinition von Funktionen definiert Funktionen als Mengen, vermeidet den undefinierten Begriff der "Vorschrift" und gibt der Mathematik somit eine rein mengentheoretische Grundlage.

Operationen

Definition (Operation)

M sei eine Menge. Eine *Operation (oder Verknüpfung)* $\circ$ auf M ist eine Funktion der Form

$$\circ : N \subseteq M \times M \to M, (m,n) \mapsto \circ((m,n)). \tag{26}$$

Bemerkungen

- Die Einschränkung von $M \times M$ auf $N \subseteq M \times M$ dient dem Realitätsanspruch extensiver Strukturen.
- Siehe dazu auch Krantz and Suppes (1971), S. 81-82.
- Im numerischen Kontext ist meist $N = M \times M$.

Operationen

Beispiele

- Eine vertraute Operation ist die Addition natürlicher Zahlen

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (m, n) \mapsto +((m, n)) := m + n. \tag{27}$$

- Eine andere vertraute Operation ist die Multiplikation ganzer Zahlen,

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (m, n) \mapsto \cdot((m, n)) := mn. \tag{28}$$

- Für eine Menge N und die Menge

$$M := \{f : N \to N | f \text{ ist eine Funktion}\} \tag{29}$$

ist die Verknüpfung von Funktionen eine Operation auf M,

$$\circ : M \times M \to M, (f, g) \mapsto \circ((f, g)) := f \circ g \text{ mit } (f \circ g)(n) := f(g(n)) \text{ für alle } n \in N. \tag{30}$$

- Eine Operation ist eine 3-stellige Relation R auf einer Menge M der Form

$$R = \{(m, n, m \circ n) | m, n, m \circ n \in M\} \subseteq M \times M \times M \tag{31}$$

Allerdings ist nicht jede 3-stellige Relation R auf einer Menge M eine Operation

Operationen

Beispiele (fortgeführt)

- Sei zum Beispiel $M := \{1, 2, 3\}$. Dann entspricht die Operation

$$
\circ : M \times M \to M, (m, n) \mapsto \circ((m, n)) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } a + b \text{ gerade ist} \\ 2 & \text{wenn } a + b \text{ ungerade ist} \end{cases}. \tag{32}
$$

der 3-stelligen Relation

$$
R = \{(1, 1, 1), (1, 2, 2), (1, 3, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 3, 2), (3, 1, 1), (3, 2, 2), (3, 3, 1)\} \tag{33}
$$

- Sei zum Beispiel wiederum $M := \{1, 2, 3\}$ und die 3-stellige Relation R definiert als

$$
R := \{(1, 1, 1), (1, 2, 2), (1, 3, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 3, 2), (3, 1, 1), (3, 2, 2), (1, 3, 2)\}. \tag{34}
$$

Dann gilt sowohl $(1, 3, 1) \in R$ und $(1, 3, 2) \in R$, also in Operationschreibweise

$$
(1, 3) \mapsto \circ((1, 3)) := 1 \text{ und } (1, 3) \mapsto \circ((1, 3)) := 2. \tag{35}
$$

Dann ist $\circ$ aber keine Funktion, weil eine Funktion jedem Element der Definitionsmenge nur höchstens ein Element der Zielmenge zuordnet und nicht zwei.

Definition

Ausgewählte Eigenschaften

Operationen

Relationssysteme

Selbstkontrollfragen

Definition (Relationssystem)

M sei eine Menge, $R_1, ..., R_p$ seien Relationen auf M und $\circ_1, ..., \circ_q$ seien Operationen auf M. Dann wird das $(1 + p + q)$-Tupel

$$\mathcal{M} := (M, R_1, ..., R_p, \circ_1, ..., \circ_q) \tag{36}$$

ein *Relationssystem* genannt. Für $M := \mathbb{R}$ heißt ein Relationssystem ein *numerisches Relationssystem*. Der *Typ eines Relationssystems* ist eine (endliche) Folge $(r_1, ..., r_p, q)$ der Länge $p + 1$, für die gilt, dass für alle $i = 1, ..., p$ r_i gleich ρ ist, wenn R_i eine ρ-stellige Relation ist.

Bemerkungen

- Da $\circ_1, ..., \circ_q$ Binärrelationen sind, könne man auch $\mathcal{M} := (M, R_1, ..., R_{p+q})$ schreiben.
- Der Relationstyp $(2, 3, 2)$ eines Relationssystems $\mathcal{M}$ besagt, dass auf der Menge M eine 2-stellige und eine 3-stellige Relation, sowie zwei Operationen definiert sind.

Relationssystem

Beispiele für (qualitative) Relationssysteme

(1) M sei eine Menge von Objekten und es sei

$$R := \{(m,n) | m \text{ ist wärmer als } n\} \subseteq M \times M. \tag{37}$$

Dann ist $\mathcal{M} := (M, R)$ ein Relationssystem vom Typ $(2, 0)$.

(2) M sei eine Menge von Entscheidungsoptionen und es sei

$$R := \{(m,n) | m \text{ wird präferiert über } n\} \subseteq M \times M \tag{38}$$

Dann ist $\mathcal{M} := (M, R)$ ein Relationssystem vom Typ $(2, 0)$.

(3) M sei eine Menge von Objekten und es sei

$$R := \{(m,n) | m \text{ ist schwerer als } n\} \subseteq M \times M \tag{39}$$

und

$$\circ : M \times M \to M, (m,n) \mapsto \circ((m,n)) := \text{Die physische Kombination von } m \text{ und } n. \tag{40}$$

Dann ist $\mathcal{M} := (M, R, \circ)$ ein Relationssystem vom Typ $(2, 1)$.

Beispiele für numerische Relationssysteme

(1) $\mathcal{N} := (\mathbb{R}, >)$ ist ein numerisches Relationsystem vom Typ (2,0).
(2) $\mathcal{N} := (\mathbb{R}, >, \geq)$ ist ein numerisches Relationsystem vom Typ (2,2,0).
(3) $\mathcal{N} := (\mathbb{R}, >, \geq, +)$ ist ein numerisches Relationsystem vom Typ (2,2,1).
(4) $\mathcal{N} := (\mathbb{R}, >, \geq, +, \cdot)$ ist ein numerisches Relationsystem vom Typ (2,2,2).

Definition

Ausgewählte Eigenschaften

Operationen

Relationssysteme

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Definieren Sie das Kartesische Produkt zweier Mengen.
2. Definieren Sie das Kartesische Produkt dreier Mengen.
3. Definieren Sie den Begriff der Binärrelation.
4. Definieren Sie den Begriff einer dreistelligen Relation.
5. Erläutern Sie die $\geq$ Relation.
6. Definieren Sie den Begriff der reflexiven Binrärelation.
7. Definieren Sie den Begriff der irreflexiven Binrärelation.
8. Was ist der Unterschied zwischen einer nicht reflexiven und einer irreflexiven Relation?
9. Definieren Sie den Begriff einer symmetrischen Binärrelation.
10. Definieren Sie den Begriff einer transitiven Binärrelation.
11. Definieren Sie den Begriff einer negativ-transitiven Binärrelation.
12. Geben Sie die Relationsdefinition einer Funktion wieder.
13. Definieren Sie den Begriff der Operation.
14. Definieren Sie den Begriff des Relationssystems.
15. Geben Sie ein Beispiel für ein qualitatives Relationssytem.
16. Geben Sie ein Beispiel für ein numerisches Relationssystem.

Referenzen

Krantz, David H., and Patrick Suppes, eds. 1971. *Foundations of Measurement*. New York: Academic Press.