



# Grundlagen der Mathematik und Informatik

Aufbaukurs: Fit für Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

Inhalte basieren auf Einführung in Mathematik und Informatik von Dirk Ostwald, lizenziert unter CC BY-NC-SA 4.0

## (5) Differentialrechnung

---

Grundlagen der Differentialrechnung

Analytische Optimierung

Selbstkontrollfragen

---

## **Grundlagen der Differentialrechnung**

Analytische Optimierung

Selbstkontrollfragen

## Definition (Ableitung)

Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \quad (1)$$

eine univariate reellwertige Funktion.  $f$  heißt in  $a \in I$  *differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

existiert.  $f'(a)$  heißt dann die *Ableitung von  $f$  an der Stelle  $a$* . Ist  $f$  differenzierbar für alle  $x \in I$ , so heißt  $f$  *differenzierbar* und die Funktion

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x) \quad (3)$$

heißt *Ableitung von  $f$*

### Bemerkungen

- Für  $h > 0$  heißt  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  *Differenzquotient*.
- Der Differenzquotient misst die Änderung  $f(a+h) - f(a)$  von  $f$  pro Strecke  $h$ .
- Für  $h \rightarrow 0$  misst der Differenzquotient die Änderungsrate von  $f$  in  $a$ .
- $f'(a)$  ist eine Zahl,  $f'$  ist eine Funktion.
- Wir werden keine Grenzwertbildung zur Berechnung von Ableitungen benötigen.

## Definition (Notation für Ableitungen univariater reellwertiger Funktionen)

Es sei  $f$  eine univariate reellwertige Funktion. Äquivalente Schreibweisen für die Ableitung von  $f$  und die Ableitung von  $f$  an einer Stelle  $x$  sind

- (1) die *Lagrange-Notation*  $f'$  und  $f'(x)$ ,
- (2) die *Newton-Notation*  $\dot{f}$  und  $\dot{f}(x)$ ,
- (3) die *Leibniz-Notation*  $\frac{df}{dx}$  und  $\frac{df(x)}{dx}$  und
- (4) die *Euler-Notation*  $Df$  und  $Df(x)$ .

### Bemerkungen

- Für univariate reellwertige Funktionen benutzen wir  $f'$  und  $f'(x)$  als Bezeichner.
- In Berechnungen benutzen wir auch die "Operator-Schreibweise"  $\frac{d}{dx} f(x)$ .
- Wir verstehen  $\frac{d}{dx} f(x)$  als den Auftrag, die Ableitung von  $f$  zu berechnen.

## Definition (Höhere Ableitungen)

Es sei  $f$  eine univariate reellwertige Funktion und

$$f^{(1)} := f' \quad (4)$$

sei die Ableitung von  $f$ . Die  $k$ -te Ableitung von  $f$  ist rekursiv definiert durch

$$f^{(k)} := \left(f^{(k-1)}\right)' \quad \text{für } k \geq 0, \quad (5)$$

unter der Annahme, dass  $f^{(k-1)}$  differenzierbar ist. Insbesondere ist die *zweite Ableitung von  $f$*  definiert durch die Ableitung von  $f'$ , also

$$f'' := (f')'. \quad (6)$$

### Bemerkungen

- Wir schreiben auch  $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$  für den Auftrag, die zweite Ableitung von  $f$  zu bestimmen.
- Die nullte Ableitung  $f^{(0)}$  von  $f$  ist  $f$  selbst.
- Üblicherweise schreibt man für  $k < 4$   $f', f'', f'''$  statt  $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ .
- Im Allgemeinen benötigen wir nur  $f'$  und  $f''$ .

## Theorem (Rechenregeln für Ableitungen)

Für  $i = 1, \dots, n$  seien  $g_i$  reellwertige univariate differenzierbare Funktionen. Dann gelten folgende Rechenregeln für Ableitungen

(1) Summenregel

$$\text{Für } f(x) := \sum_{i=1}^n g_i(x) \text{ gilt } f'(x) = \sum_{i=1}^n g_i'(x). \quad (7)$$

(2) Produktregel

$$\text{Für } f(x) := g_1(x)g_2(x) \text{ gilt } f'(x) = g_1'(x)g_2(x) + g_1(x)g_2'(x). \quad (8)$$

(3) Quotientenregel

$$\text{Für } f(x) := \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \text{ gilt } f'(x) = \frac{g_1'(x)g_2(x) - g_1(x)g_2'(x)}{g_2^2(x)}. \quad (9)$$

(4) Kettenregel

$$\text{Für } f(x) := g_1(g_2(x)) \text{ gilt } f'(x) = g_1'(g_2(x))g_2'(x). \quad (10)$$

Bemerkung

- Für Beweise der Rechenregeln wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.

## Theorem (Ableitungen elementarer Funktionen)

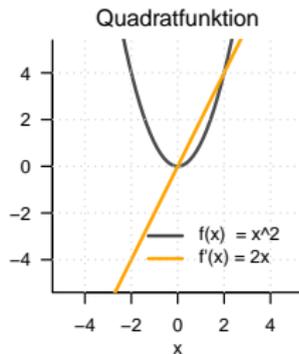
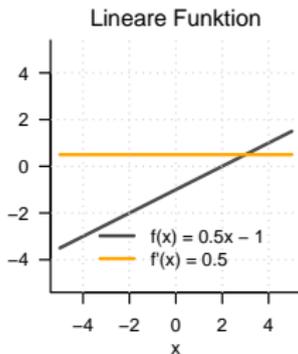
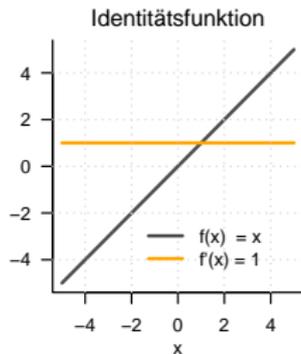
Für einige elementare Funktionen der Datenanalyse ergeben sich folgende Ableitungen

Name	Definition	Ableitung
Polynomfunktionen	$f(x) := \sum_{i=0}^n a_i x^i$	$f'(x) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$
Konstante Funktion	$f(x) := a$	$f'(x) = 0$
Identitätsfunktion	$f(x) := x$	$f'(x) = 1$
Lineare Funktion	$f(x) := ax + b$	$f'(x) = a$
Quadratfunktion	$f(x) := x^2$	$f'(x) = 2x$
Exponentialfunktion	$f(x) := \exp(x)$	$f'(x) = \exp(x)$
Logarithmusfunktion	$f(x) := \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

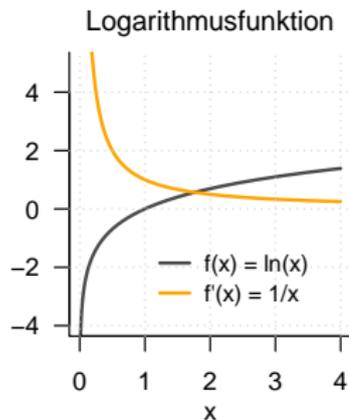
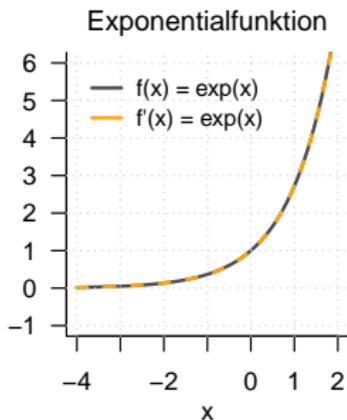
### Bemerkung

- Für Beweise wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.

## Ableitungen elementarer Funktionen



## Ableitungen elementarer Funktionen



---

Grundlagen der Differentialrechnung

**Analytische Optimierung**

Selbstkontrollfragen

## Definition (Extremstellen und Extremwerte)

Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine univariante reellwertige Funktion. Dann hat  $f$  an der Stelle  $x_0 \in U$

- ein *lokales Minimum*, wenn es ein Intervall  $I := ]a, b[$  gibt mit  $x_0 \in ]a, b[$  und

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in I \cap U, \quad (11)$$

- ein *globales Minimum*, wenn gilt, dass

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in U, \quad (12)$$

- ein *lokales Maximum*, wenn es ein Intervall  $I := ]a, b[$  gibt mit  $x_0 \in ]a, b[$  und

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in I \cap U, \quad (13)$$

- ein *lokales Maximum*, wenn gilt, dass

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in U. \quad (14)$$

Der Wert  $x_0 \in U$  der Definitionsmenge von  $f$  heißt entsprechend *lokale* oder *globale Minimalstelle* oder *Maximalstelle*, der Funktionswert  $f(x_0) \in \mathbb{R}$  heißt entsprechend *lokales* oder *globales Minimum* oder *Maximum*. Generell heißt der Wert  $x_0 \in U$  *Extremstelle* und der Funktionswert  $f(x_0) \in \mathbb{R}$  *Extremwert*.

### Bemerkungen

- Extremstellen werden auch mit  $\arg \min_{x \in I \cap U} f(x)$  oder  $\arg \max_{x \in I \cap U} f(x)$  bezeichnet.
- Extremwerte werden auch mit  $\min_{x \in I \cap U} f(x)$  oder  $\max_{x \in I \cap U} f(x)$  bezeichnet.

## Definition (Notwendige Bedingung für Extrema)

$f$  sei eine univariate reellwertige Funktion. Dann gilt

$$x_0 \text{ ist Extremstelle von } f \Rightarrow f'(x_0) = 0. \quad (15)$$

### Bemerkungen

- *Notwendige Bedingung* sagt aus:
  - Wenn  $x_0$  eine Extremstelle von  $f$  ist, dann ist die erste Ableitung von  $f$  in  $x_0$  null.
  - Aber wenn die erste Ableitung von  $f$  in  $x_0$  null ist, ist  $x_0$  nicht unbedingt eine Extremstelle, weil das auch ein Sattelpunkt sein könnte.
- Sei zum Beispiel  $x_0$  eine lokale Maximalstelle von  $f$ . Dann gilt
  - Links von  $x_0$  steigt  $f$  an, rechts von  $x_0$  fällt  $f$  ab.
  - In  $x_0$  steigt  $f$  weder an, noch fällt  $f$  ab, also ist  $f'(x_0) = 0$ .

### Definition (Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema)

$f$  sei eine zweimal differenzierbare univariate reellwertige Funktion.

- Wenn für  $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) > 0 \quad (16)$$

gilt, dann hat  $f$  an der Stelle  $x_0$  ein Minimum.

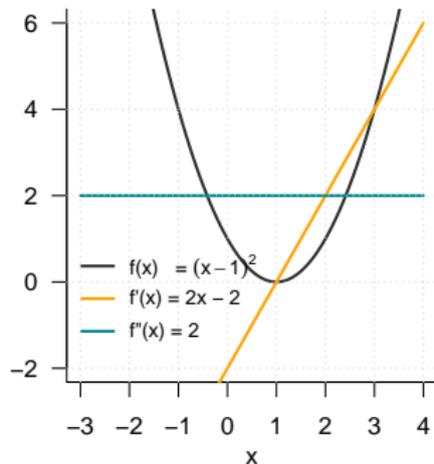
- Wenn für  $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) < 0 \quad (17)$$

gilt, dann hat  $f$  an der Stelle  $x_0$  ein Maximum.

#### Bemerkung

- Eine Intuition vermittelt nachfolgende Abbildung.



Hier ist offenbar  $x_0 = 1$  eine lokale Minimalstelle von  $f(x) = (x - 1)^2$ . Man erkennt:

- Links von  $x_0$  fällt  $f$  ab, rechts von  $x_0$  steigt  $f$  an.
- In  $x_0$  steigt  $f$  weder an, noch fällt  $f$  ab, also ist  $f'(x_0) = 0$ .
- Links und rechts von  $x_0$  und in  $x_0$  ist die Änderung  $f''$  von  $f'$  positiv.
- Links von  $x_0$  schwächt sich die Negativität von  $f'$  zu 0 ab.
- Rechts von  $x_0$  verstärkt sich die Positivität von  $f'$ .

## Definition (Standardverfahren der analytischen Optimierung)

$f$  sei eine univariate reellwertige Funktion. Lokale Extremstellen von  $f$  können mit folgendem *Standardverfahren der analytischen Optimierung* identifiziert werden:

- (1) Berechnen der ersten und zweiten Ableitung von  $f$ .
- (2) Bestimmen von Nullstellen  $x^*$  von  $f'$  durch Auflösen von  $f'(x^*) = 0$  nach  $x^*$ .  
⇒ Nullstellen von  $f'$  sind Kandidaten für Extremstellen von  $f$ .
- (3) Evaluation von  $f''(x^*)$ .  
⇒ Wenn  $f''(x^*) > 0$ , dann ist  $x^*$  lokale Minimumstelle von  $f$ .  
⇒ Wenn  $f''(x^*) < 0$ , dann ist  $x^*$  lokale Maximumstelle von  $f$ .  
⇒ Wenn  $f''(x^*) = 0$ , dann ist  $x^*$  keine Extremstelle von  $f$ .

## Beispiel für Standardverfahren analytischer Optimierung

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := (x - 1)^2. \quad (18)$$

Die erste Ableitung von  $f$  ergibt sich mit der Kettenregel zu

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( (x - 1)^2 \right) = 2(x - 1) \cdot \frac{d}{dx} (x - 1) = 2x - 2. \quad (19)$$

Die zweite Ableitung von  $f$  ergibt sich zu

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx} (2x - 2) = 2 > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (20)$$

Auflösen von  $f'(x^*) = 0$  nach  $x^*$  ergibt

$$f'(x^*) = 0 \Leftrightarrow 2x^* - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^* = 2 \Leftrightarrow x^* = 1. \quad (21)$$

$x^* = 1$  ist folglich eine Minimalstelle von  $f$  mit zugehörigen Minimalwert  $f(1) = 0$ .

---

Grundlagen der Differentialrechnung

Analytische Optimierung

**Selbstkontrollfragen**

# Selbstkontrollfragen

---

1. Definieren Sie den Begriff der Ableitung  $f'(a)$  einer Funktion  $f$  an einer Stelle  $a$ .
2. Definieren den Begriff der Ableitung  $f'$  einer Funktion  $f$ .
3. Erläutern Sie die Symbole  $f'(x)$ ,  $\dot{f}(x)$ ,  $\frac{df(x)}{dx}$ , und  $\frac{d}{dx}f(x)$ .
4. Definieren Sie den Begriff der zweiten Ableitung  $f''$  einer Funktion  $f$ .
5. Geben Sie die Summenregel für Ableitungen wieder.
6. Geben Sie die Produktregel für Ableitungen wieder.
7. Geben Sie die Quotientenregel für Ableitungen wieder.
8. Geben Sie die Kettenregel für Ableitungen wieder.
9. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion  $f(x) := 3x^2 + \exp(-x^2) - x \ln(x)$ .
10. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion  $f(x) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$  für  $\mu \in \mathbb{R}$ .
11. Definieren Sie die Begriffe des globalen und lokalen Maximums/Minimums einer Funktion.
12. Geben Sie die notwendige Bedingung für ein Extremum einer Funktion wieder.
13. Geben Sie die hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum einer Funktion wieder.
14. Geben Sie das Standardverfahren der analytischen Optimierung wieder.
15. Bestimmen Sie einen Extremwert von  $f(x) := \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right)$  für  $\mu \in \mathbb{R}$ .