



Grundlagen der Mathematik und Informatik

Aufbaukurs: Fit für Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

Inhalte basieren auf Einführung in Mathematik und Informatik von Dirk Ostwald, lizenziert unter CC BY-NC-SA 4.0

(4) Funktionen

Definition und Eigenschaften

Funktionentypen

Elementare Funktionen

Selbstkontrollfragen

Definition und Eigenschaften

Funktionentypen

Elementare Funktionen

Selbstkontrollfragen

Definition (Funktion)

Eine *Funktion* (oder *Abbildung*) f ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element einer Menge D genau ein Element einer Zielmenge Z zuordnet. D wird dabei *Definitionsmenge von f* und Z wird *Zielmenge von f* genannt. Wir schreiben

$$f : D \rightarrow Z, x \mapsto f(x), \quad (1)$$

wobei $f : D \rightarrow Z$ gelesen wird als "die Funktion f bildet alle Elemente der Menge D eindeutig auf Elemente in Z ab" und $x \mapsto f(x)$ gelesen wird als " x , welches ein Element von D ist, wird durch die Funktion f auf $f(x)$ abgebildet, wobei $f(x)$ ein Element von Z ist". Der Pfeil \rightarrow steht für die Abbildung zwischen den Mengen D und Z , der Pfeil \mapsto steht für die Abbildung zwischen einem Element von D und einem Element von Z .

Bemerkungen

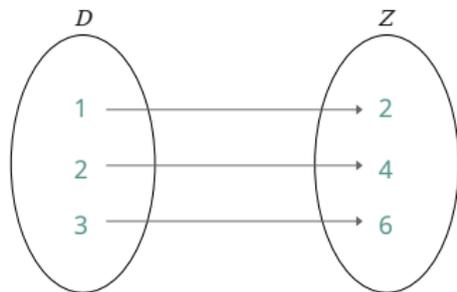
- Es ist zentral, zwischen der *Funktion* f als Zuordnungsvorschrift und einem *Wert* der Funktion $f(x)$ als Element von Z zu unterscheiden.
- x ist der Funktionsinput (auch *Argument* der Funktion genannt), $f(x)$ der Funktionsoutput.
- Üblicherweise folgt $f(x)$ die Definition der *funktionalen Form* von f , z.B.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto f(x) := x^2. \quad (2)$$

Veranschaulichung - Definitions- und Zielmenge

Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := 2x.$$



Bemerkung:

- Die aufgeführten Werte in Definitions- und Zielbereich (1,2,3 und 2,4,6) sind nicht vollständig, sondern nur beispielhaft.

Definition (Bildmenge, Urbildmenge)

Es sei $f : D \rightarrow Z, x \mapsto f(x)$ eine Funktion und es seien $D' \subseteq D$ und $Z' \subseteq Z$.

- Die Menge

$$f(D') := \{z \in Z \mid \text{Es gibt ein } x \in D' \text{ mit } z = f(x)\} \quad (3)$$

heißt die *Bildmenge von D'* und $f(D) \subseteq Z$ heißt der *Wertebereich* von f .

- Die Menge

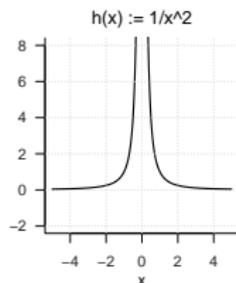
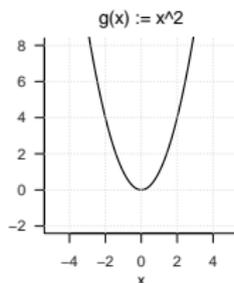
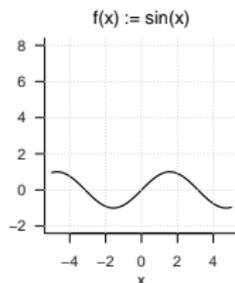
$$f^{-1}(Z') := \{x \in D \mid f(x) \in Z'\} \quad (4)$$

heißt die *Urbildmenge von Z'* . $x \in D$ mit $z = f(x) \in Z$ heißt auch *Urbild von z* .

Bemerkung

- Wertebereich $f(D)$ und Zielmenge Z sind nicht notwendigerweise identisch.

Abbildung, Bild- und Urbilder - Beispiele

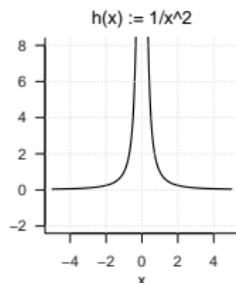
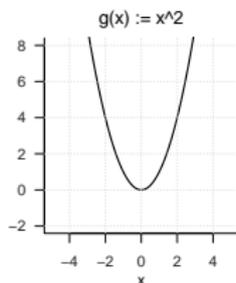
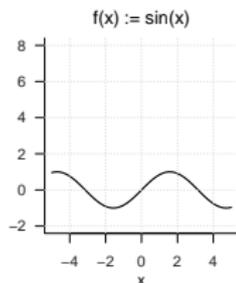


	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$	$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x)$	$h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto h(x)$
Funktionale Form	$f(x) := \sin(x)$	$g(x) := x^2$	$h(x) := \frac{1}{x^2}$
Definitionsmenge	$D := \mathbb{R}$	$D := \mathbb{R}$	$D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Zielmenge	$Z := \mathbb{R}$	$Z := \mathbb{R}$	$Z := \mathbb{R}$
Wertebereich	$f(D) = [-1, 1] \subseteq Z$	$g(D) = [0, \infty[\subseteq Z$	$h(D) = \mathbb{R}^+ \subseteq Z$
Bild von $x = 1 \in D$	$f(1) = \sin(1) = 0.84$	$g(1) = 1^2 = 1$	$h(1) = \frac{1}{1^2} = 1$
Ein Urbild von $z = 1 \in Z$	$f_1^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$	$g_1^{-1}(1) = 1$	$h_1^{-1}(1) = 1$

Anmerkungen:

- Das Bild der gesamten Definitionsmenge D entspricht dem Wertebereich $f(D) \subseteq Z$.
- Bei allen drei Beispielen existieren zu jedem Bild z mehrere Urbilder $f^{-1}(z)$. Solche Funktionen heißen *nicht-injektiv*.
- Ein weiteres Beispiel für ein Urbild von $x = 1$ gegeben der Abbildung f ist $f_2^{-1}(1) = -\frac{3\pi}{2}$. Es existieren noch unendlich viele Urbilder von $x = 1$ gegeben der Abbildung f .
- Für g und h existieren jeweils 2 Urbilder von $x = 1$. Neben den oben angegeben sind das $g_2^{-1}(1) = -1$ und $h_2^{-1}(1) = -1$.
- Außerdem hat in allen drei Beispielen nicht jedes Element der Zielmengen Z ein Urbild in den Definitionsmengen D (*nicht-surjektiv*).

Abbildung, Bilder und Urbilder - Beispiele



Es seien $D' =]0, 2] \subset D$ und $Z' =]0, 4] \subset Z$, dann ergeben sich folgende Bild- Urbildmengen.

Bildmenge von D'	$f(D') =]0, 1] \subset Z$	$g(D') =]0, 4] \subset Z$	$h(D') = [0.25, \infty[\subset Z$
Urbildmenge von Z'	$f^{-1}(Z')$ $= \dots]0, \pi[\cup]2\pi, 3\pi[\dots$	$g^{-1}(Z')$ $= [-2, 0[\cup]0, 2]$	$h^{-1}(Z')$ $=]-\infty, -0.25] \cup [0.25, \infty[$

Definition (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität)

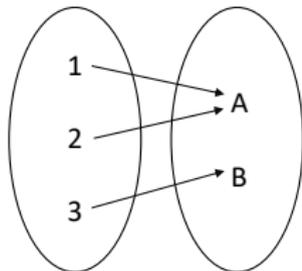
Es sei $f : D \rightarrow Z, x \mapsto f(x)$ eine Funktion.

- Die Funktion f heißt *injektiv*, wenn es zu jedem Bild $z \in f(D)$ genau ein Urbild $x \in D$ gibt. Äquivalent gilt, dass f injektiv ist, wenn aus $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ folgt, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$ ist.
- Die Funktion f heißt *surjektiv*, wenn $f(D) = Z$ gilt, wenn also jedes Element der Zielmenge Z ein Urbild in der Definitionsmenge D hat.
- Die Funktion f heißt *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist.

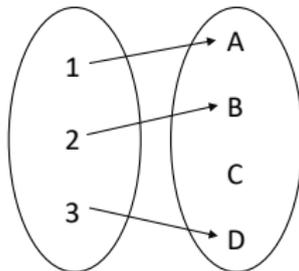
Bemerkungen

- Bijektive Abbildungen heißen auch *eindeutige Funktionen* (engl. *one-to-one mappings*).

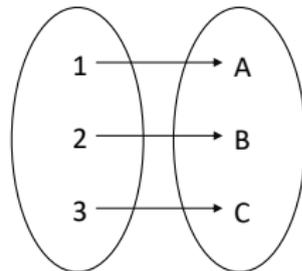
A Nicht-injektiv



B Nicht-surjektiv

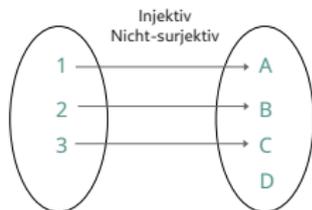
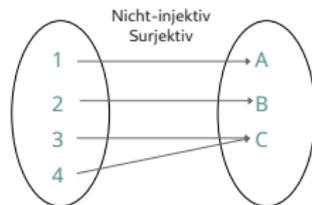
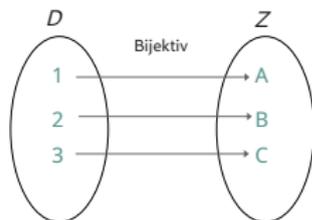


C Bijektiv

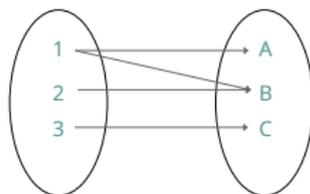
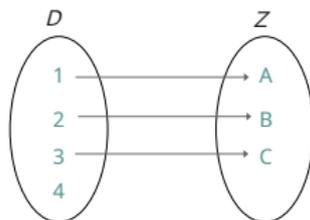


Abbildungen - Beispiele

Abbildungen



keine Abbildungen



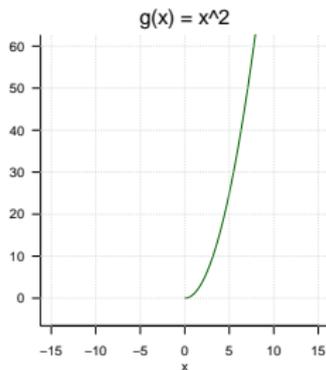
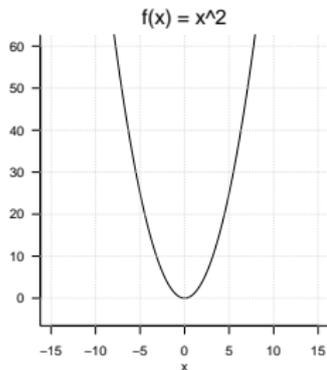
Funktionseigenschaften - Beispiel

Wir betrachten die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := x^2$$

und

$$g : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, x \mapsto g(x) := x^2$$



- f ist nicht injektiv, weil z.B. für $x_1 = 2 \neq -2 = x_2$ gilt, dass $f(x_1) = 2^2 = 4 = (-2)^2 = f(x_2)$.
- Weiterhin ist f auch nicht surjektiv, weil z.B. $-1 \in \mathbb{R}$ kein Urbild unter f hat.
- g ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

Definition und Eigenschaften

Funktionentypen

Elementare Funktionen

Selbstkontrollfragen

Definition (Verkettete Funktionen)

Es seien $f : D \rightarrow R$ und $g : R \rightarrow S$ zwei Funktionen, wobei die Zielmenge von f mit der Definitionsmenge von g übereinstimmen. Dann ist durch

$$g \circ f : D \rightarrow S, x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad (5)$$

eine Funktion definiert, die die *Verkettung von f und g* genannt wird.

Bemerkungen

- $g \circ f$ bezeichnet die Funktion.
- $(g \circ f)(x)$ bezeichnet ein Element in S .
- Erst wird f auf x angewendet, dann wird g auf $f(x)$ angewendet.

Beispiel:

- Für $f(x) := -x^2$ und $g(x) := \exp(x)$ ist $(g \circ f)(x) = \exp(-x^2)$.

Definition (Inverse Funktion)

Es sei $f : D \rightarrow R, x \mapsto f(x)$ eine bijektive Funktion. Dann heißt die Funktion f^{-1} mit

$$f^{-1} \circ f : D \rightarrow D, x \mapsto (f^{-1} \circ f)(x) := f^{-1}(f(x)) = x \quad (6)$$

inverse Funktion (oder *Umkehrfunktion*) von f .

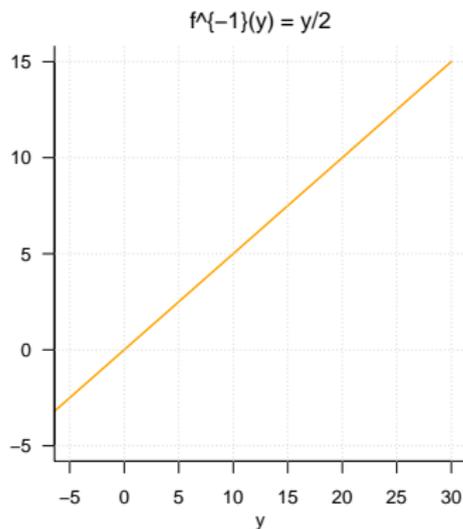
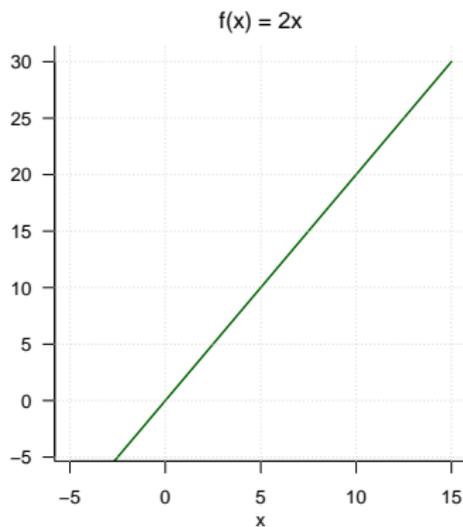
Bemerkungen

- Weil f bijektiv ist, wird jedem $x \in D$ genau ein $z = f(x) \in Z$ zugeordnet.
- Jedem $z \in Z$ wird also auch genau ein $x \in D$ zugeordnet.
- Die inverse Funktion einer bijektiven Funktion ist also auch bijektiv.

Inverse - Beispiel

Beispiel:

- Beispiel: Die inverse Funktion von $f(x) := 2x =: y$ ist $f^{-1}(y) = y/2$.



Definition (Lineare Abbildung)

Eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ heißt *lineare Abbildung*, wenn für $x, y \in D$ und einen Skalar c gelten, dass

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ und } f(cx) = cf(x). \quad (7)$$

Eine Abbildung, für die obige Eigenschaften nicht gelten, heißt *nicht-lineare Abbildung*.

Bemerkungen

- Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := ax$ linear, weil

$$f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y) \text{ und } f(cx) = acx = cax = cf(x). \quad (8)$$

- Für $a, b \in \mathbb{R}$ dagegen ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := ax + b$ nicht-linear, weil z.B. für $a := b := 1$ gilt, dass

$$f(x + y) = 1(x + y) + 1 = x + y + 1 \neq x + 1 + y + 1 = f(x) + f(y). \quad (9)$$

- Eine Abbildung der Form $f(x) := ax + b$ heißt *affin-lineare Abbildung*
- Abbildungen der Form $f(x) := ax + b$ werden auch als *lineare Funktionen* bezeichnet.

Theorem (Lineare Abbildung der Null)

$f : D \rightarrow R$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$f(0) = 0. \tag{10}$$

Beweis

Mit der Additivität von f gilt

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0). \tag{11}$$

Addition von $-f(0)$ auf beiden Seiten obiger Gleichung ergibt dann

$$f(0) - f(0) = f(0) + f(0) - f(0) \Leftrightarrow 0 = f(0). \tag{12}$$

□

Definition (Funktionsarten)

In der statistischen Anwendung unterscheiden wir

- *univariate reellwertige Funktionen* der Form

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x), \quad (13)$$

- *multivariate reellwertige Funktionen* der Form

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = f(x_1, \dots, x_n), \quad (14)$$

- *multivariate vektorwertige Funktionen* der Form

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Bemerkung

- In der Physik werden multivariate reellwertige Funktionen auch *Skalarfelder* genannt.
- In der Physik werden multivariate vektorwertige Funktionen auch *Vektorfelder* genannt.
- In manchen Anwendungen kommen auch *matrixvariante matrixwertige Funktionen* zum Tragen.

Definition und Eigenschaften

Funktionentypen

Elementare Funktionen

Selbstkontrollfragen

Elementare Funktionen

Elementare univariate reellwertige Funktion der probabilistischen Datenanalyse sind

- die Polynomfunktionen,
- die Exponentialfunktion,
- die Logarithmusfunktion,
- die Gammafunktion.

Wir skizzieren diese Funktionen im Folgenden.

Definition (Polynomfunktionen)

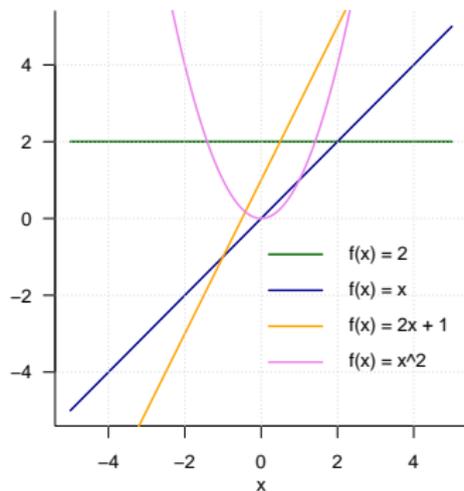
Eine Funktion der Form

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \sum_{i=0}^k a_i x^i = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k \quad (16)$$

heißt *Polynomfunktion* k -ten Grades mit Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$. Typische Polynomfunktionen sind in nachfolgender Tabelle aufgelistet

Name	Funktionale Form	Koeffizienten
Konstante Funktion	$f(x) = a$	$a_0 := a, a_i := 0, i > 0$
Identitätsfunktion	$f(x) = x$	$a_0 := 0, a_1 := 1, a_i := 0, i > 1$
Lineare Funktion	$f(x) = ax + b$	$a_0 := b, a_1 := a, a_i := 0, i > 1$
Quadratfunktion	$f(x) = x^2$	$a_0 := 0, a_1 := 0, a_2 := 1, a_i := 0, i > 2$

Graphen typischer Polynomfunktionen



Theorem (Exponentialfunktion und ihre Eigenschaften)

Die *Exponentialfunktion* ist definiert als

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x) := e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (17)$$

Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:

Wertebereich	$x \in] - \infty, 0[\Rightarrow \exp(x) \in]0, 1[$ $x \in]0, \infty[\Rightarrow \exp(x) \in]1, \infty[$
Monotonie	$x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$
Spezielle Werte	$\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$
Exponentialeigenschaften	$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$ $\exp(x) \exp(-x) = 1$

Bemerkungen

- Für Beweise der Eigenschaften wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.
- Die Exponentialeigenschaften sind beim Rechnen mit der Normalverteilung zentral.
- $e \approx 2.71$ heißt *Eulersche Zahl*.

Theorem (Logarithmusfunktion und ihre Eigenschaften)

Die *Logarithmusfunktion* ist definiert als inverse Funktion der Exponentialfunktion,

$$\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x) \text{ mit } \ln(\exp(x)) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

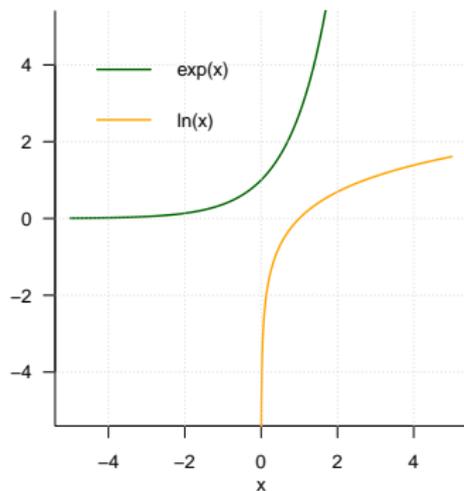
Die Logarithmusfunktion hat folgende Eigenschaften:

Wertebereich	$x \in]0, 1[\Rightarrow \ln(x) \in] - \infty, 0[$ $x \in]1, \infty[\Rightarrow \ln(x) \in]0, \infty[$
Monotonie	$x < y \Rightarrow \ln(x) < \ln(y)$
Spezielle Werte	$\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$.
Logarithmeneigenschaften	$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ $\ln(x^c) = c \ln(x)$ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

Bemerkungen

- Für Beweise der Eigenschaften wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.
- Die Logarithmeneigenschaften sind beim Rechnen mit Log-Likelihood-Funktionen zentral.
- “Die Logarithmusfunktion wandelt Produkte in Summen und Potenzen in Produkte um.”

Graphen der Exponential- und Logarithmusfunktion



Theorem (Gammafunktion und ihre Eigenschaften)

Die *Gammafunktion* ist definiert durch

$$\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \Gamma(x) := \int_0^{\infty} \xi^{x-1} \exp(-\xi) d\xi \quad (19)$$

Die Gammafunktion hat folgende Eigenschaften:

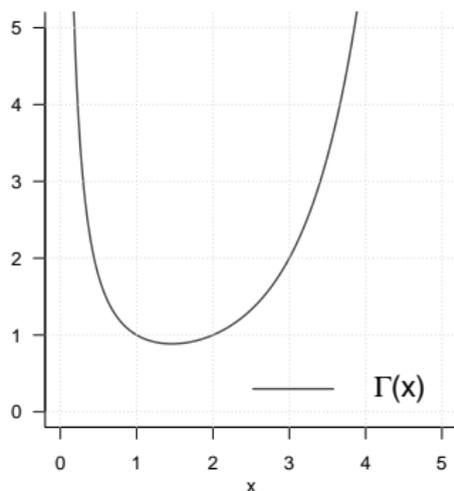
Spezielle Werte	$\Gamma(1) = 1$
	$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
	$\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$.
Rekursionseigenschaft	Für $x > 0$ gilt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Bemerkungen

- Für Beweise der Eigenschaften wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.
- Die Gammafunktion ist im Kontext von χ^2 -, t - und F -Verteilung zentral.

Elementare Funktionen - Gammafunktion

Graph der Gammafunktion auf $]0, 5[$



Definition und Eigenschaften

Funktionentypen

Elementare Funktionen

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie die Komponenten der Funktionsschreibweise $f : D \rightarrow Z, x \mapsto f(x)$.
2. Definieren Sie die Begriffe Bildmenge, Wertebereich, und Urbildmenge einer Funktion.
3. Definieren Sie die Begriffe Surjektivität, Injektivität, und Bijektivität einer Funktion.
4. Erläutern Sie, warum $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := x^2$ weder injektiv noch surjektiv ist.
5. Erläutern Sie, warum $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, x \mapsto f(x) := x^2$ bijektiv ist.
6. Erläutern Sie die Komponenten der Schreibweise $g \circ f : D \rightarrow S, x \mapsto (g \circ f)(x)$.
7. Definieren Sie den Begriff der inversen Funktion.
8. Geben Sie die inverse Funktion von x^2 auf $[0, \infty[$ an.
9. Definieren Sie den Begriff der linearen Abbildung.
10. Definieren Sie die Begriffe der univariat- und multivariat-reellwertigen Funktion.
11. Definieren Sie Begriff der multivariaten vektorwertigen Funktion.
12. Skizzieren Sie die konstante Funktion für $a := 1$ und die Identitätsfunktion.
13. Für $a = 2$ und $b = 3$, skizzieren Sie die linear Funktion $f(x) = ax + b$.
14. Skizzieren Sie die Funktionen $f(x) := (x - 1)^2$ und $g(x) := (x + 3)^2$.
15. Skizzieren Sie die Exponential- und Logarithmusfunktionen.
16. Geben Sie Exponentialeigenschaften der Exponentialfunktion an.
17. Geben Sie die Logarithmeneigenschaften der Logarithmusfunktion an.