

**(1) Einführung**

1. Diskutieren Sie die Begriffe Naturwissenschaft, Geisteswissenschaft und Formalwissenschaft
2. Beschreiben Sie den naturwissenschaftlichen Prozess.
3. Definieren Sie die Begriffe Experiment, unabhängige Variable und abhängige Variable.
4. Nennen Sie vier Ziele der wissenschaftlichen Psychologie.
5. Beschreiben Sie Beispiele für die Anwendung wissenschaftlicher Methoden in der Psychologie.
6. Nennen Sie die drei Hauptkomponenten der Datenwissenschaft.
7. Nennen Sie drei Grundannahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie.
8. Nennen Sie drei Grundannahmen der frequentistischen Statistik.
9. Nennen Sie drei Grundannahmen der Bayesianischen Statistik.

**(2) Wahrscheinlichkeitsräume**

1. Erläutern Sie Sinn und Zweck der Wahrscheinlichkeitstheorie.
2. Erläutern Sie den Begriff des Zufallsvorgangs.
3. Definieren Sie den Begriff der  $\sigma$ -Algebra.
4. Definieren Sie den Begriff des Wahrscheinlichkeitsmaßes.
5. Definieren Sie den Begriff des Wahrscheinlichkeitsraums.
6. Erläutern Sie den Begriff der Ergebnismenge  $\Omega$ .
7. Erläutern Sie den Begriff eines Ereignisses  $A \in \mathcal{A}$ .
8. Erläutern Sie den Begriff des Ereignissystems  $\mathcal{A}$ .
9. Erläutern Sie den Begriff des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mathbb{P}$ .
10. Erläutern Sie die stillschweigende Mechanik des Wahrscheinlichkeitsraummodells.
11. Welche  $\sigma$ -Algebra wählt man sinnvoller Weise für ein Wahrscheinlichkeitsraum mit endlicher Ergebnismenge?
12. Definieren Sie den Begriff der Wahrscheinlichkeitsfunktion.
13. Warum ist der Begriff der Wahrscheinlichkeitsfunktion bei der Modellierung eines Zufallsvorgangs durch einen Wahrscheinlichkeitsraums mit endlicher Ergebnismenge hilfreich?
14. Erläutern Sie die Modellierung des Werfens eines Würfels mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums.
15. Erläutern Sie die Modellierung des gleichzeitigen Werfens eines roten und eines blauen Würfels mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums.
16. Erläutern Sie die Modellierung des Werfens einer Münze mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums.
17. Erläutern Sie die Modellierung des gleichzeitigen Werfens zweier Münzen mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums.

**(3) Elementare Wahrscheinlichkeiten**

1. Erläutern Sie die Frequentistische Interpretation der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.
2. Erläutern Sie die Bayesianische Interpretation der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.
3. Geben Sie die Definition der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit zweier Ereignisse wieder.
4. Erläutern Sie die intuitive Bedeutung der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit zweier Ereignisse.
5. Geben Sie das Theorem zu weiteren Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten wieder.
6. Geben Sie die Definition der Unabhängigkeit zweier Ereignisse wieder.
7. Geben Sie die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und der bedingten Wahrscheinlichkeit wieder.
8. Geben Sie das Theorem zur bedingten Wahrscheinlichkeit unter Unabhängigkeit wieder.

9. Erläutern Sie den Begriff der stochastischen Unabhängigkeit vor dem Hintergrund des Theorems zur bedingten Wahrscheinlichkeit unter Unabhängigkeit.
10. Geben Sie das Theorem zu gemeinsamen und bedingten Wahrscheinlichkeiten wieder.
11. Geben Sie das Gesetz von der totalen Wahrscheinlichkeit wieder.
12. Geben Sie das Theorem von Bayes wieder.
13. Erläutern Sie das Theorem von Bayes im Rahmen der Bayesianischen Inferenz.
14. Beweisen Sie das Theorem von Bayes.

#### (4) Zufallsvariablen

1. Definieren Sie den Begriff der Zufallsvariable.
2. Erläutern Sie die Gleichung  $\mathbb{P}_X(X = x) = \mathbb{P}(\{X = x\})$ .
3. Erläutern Sie die Bedeutung von  $\mathbb{P}(X = x)$ .
4. Definieren Sie den Begriff der Wahrscheinlichkeitsmassefunktion.
5. Definieren Sie die Begriffe der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.
6. Definieren Sie den Begriff der kumulativen Verteilungsfunktion.
7. Schreiben sie die Intervallwahrscheinlichkeit einer Zufallsvariable mithilfe ihrer KVF.
8. Definieren Sie die WDF und KVF einer normalverteilten Zufallsvariable.
9. Schreiben Sie den Wert  $P(x)$  der KVF einer Zufallsvariable mithilfe ihrer WDF.
10. Schreiben Sie den Wert  $p(x)$  der WDF einer Zufallsvariable mithilfe ihrer KVF.
11. Definieren Sie den Begriff der inversen Verteilungsfunktion.

#### (5) Multivariate Verteilungen

1. Definieren Sie den Begriff des Zufallsvektors.
2. Definieren Sie den Begriff der multivariaten Verteilung eines Zufallsvektors.
3. Definieren Sie den Begriff der multivariaten WMF.
4. Definieren Sie den Begriff der multivariaten WDF.
5. Definieren Sie den Begriff der univariaten Marginalverteilung eines Zufallsvektors.
6. Wie berechnet man die WMF der  $i$ ten Komponente eines diskreten Zufallsvektors?
7. Wie berechnet man die WDF der  $i$ ten Komponente eines kontinuierlichen Zufallsvektors?
8. Definieren Sie den Begriff der Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen.
9. Wie erkennt man an der gemeinsamen WMF oder WDF eines zweidimensionalen Zufallsvektors, ob die Komponenten des Zufallsvektors unabhängig sind oder nicht?
10. Definieren Sie den Begriff der Unabhängigkeit von  $n$  Zufallsvariablen.
11. Definieren Sie den Begriff  $n$  unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen.

#### (6) Erwartungswert, Varianz, Kovarianz

1. Definieren und interpretieren Sie den Erwartungswert einer Zufallsvariable.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert einer Bernoulli Zufallsvariable.
3. Nennen Sie drei Eigenschaften des Erwartungswerts.
4. Definieren und interpretieren Sie die Varianz einer Zufallsvariable.
5. Berechnen Sie die Varianz einer Bernoulli Zufallsvariable.
6. Drücken Sie  $\mathbb{E}(X^2)$  mithilfe der Varianz und des Erwartungswerts von  $X$  aus.
7. Was ist  $\mathbb{V}(aX)$  für konstantes  $a \in \mathbb{R}$ ?
8. Definieren Sie die Kovarianz und Korrelation zweier Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ .

9. Geben Sie das Theorem zur Varianz von Linearkombinationen von Zufallsvariablen bei Unabhängigkeit wieder.
10. Definieren Sie den Begriff der Stichprobe.
11. Definieren Sie den Begriff des Stichprobenmittels.
12. Definieren Sie Stichprobenvarianz und Stichprobenstandardabweichung.
13. Erläutern Sie die Unterschiede zwischen dem Erwartungswertparameter, dem Erwartungswert und dem Stichprobenmittel von normalverteilten Zufallsvariablen.
14. Definieren Sie die Kovarianz und die Korrelation zweier Zufallsvariablen.
15. Schreiben Sie die Kovarianz zweier Zufallsvariablen mithilfe von Erwartungswerten.
16. Geben Sie das Theorem zur Korrelation und Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen wieder.
17. Was ist die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen bei Unabhängigkeit?
18. Was ist die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen im Allgemeinen?
19. Definieren Sie das Stichprobenmittel für eine Stichprobe zweidimensionaler Zufallsvektoren.
20. Definieren Sie die Stichprobenkovarianz einer Stichprobe von zweidimensionaler Zufallsvektoren.
21. Wann ergeben sich für die Stichprobenkovarianz hohe positive oder hohe negative Werte?
22. Wann ergeben sich für die Stichprobenkovarianz Werte nahe Null?
23. Definieren Sie den Stichprobenkorrelationskoeffizient.

#### **(7) Ungleichungen und Grenzwerte**

1. Geben Sie die Markov Ungleichung wieder.
2. Geben Sie die Chebyshev Ungleichung wieder.
3. Geben Sie die Cauchy-Schwarz Ungleichung wieder.
4. Geben Sie die Korrelationsungleichung wieder.
5. Definieren Sie den Begriff der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.
6. Definieren Sie den Begriff der Konvergenz in Verteilung.
7. Geben Sie das Schwache Gesetz der Großen Zahl wieder.
8. Erläutern Sie den Zentralen Grenzwertsatz nach Lindenberg und Lévy.
9. Erläutern Sie den Zentralen Grenzwertsatz nach Liapunov.
10. Warum sind die Zentralen Grenzwertsätze für die statistische Modellbildung wichtig?

#### **(8) Transformationen von Normalverteilungen**

1. Erläutern Sie den Begriff der Transformation einer Zufallsvariable.
2. Erläutern Sie die zentrale Idee der Transformationstheoreme.
3. Erläutern Sie die Bedeutung der Standardtransformationen für die Statistik.
4. Geben Sie das Summentransformationstheorem wieder.
5. Geben Sie das Mittelwerttransformationstheorem wieder.
6. Geben Sie das  $Z$ -Transformationstheorem wieder.
7. Geben Sie das  $\chi^2$ -Transformationstheorem wieder.
8. Beschreiben Sie die WDF der  $t$ -Verteilung in Abhängigkeit ihrer Freiheitsgrade.
9. Geben Sie das  $T$ -Transformationstheorem wieder.
10. Geben Sie das  $F$ -Transformationstheorem wieder.

**(9) Grundbegriffe frequentistischer Inferenz**

1. Definieren und erläutern Sie den Begriff des statistischen Modells.
2. Definieren und erläutern Sie den Begriff eines parametrischen statistischen Produktmodells.
3. Erläutern Sie den Unterschied zwischen univariaten und multivariaten statistischen Modellen.
4. Formulieren Sie das Bernoulli-Modell.
5. Formulieren Sie das Normalverteilungsmodell.
6. Definieren und erläutern Sie den Begriff der Statistik.
7. Definieren und erläutern Sie den Begriff des Schätzers.
8. Nennen und erläutern Sie die Standardprobleme der frequentistischen Inferenz.
9. Erläutern Sie die Standardannahmen der frequentistischen Inferenz.

**(10) Parameterschätzung**

1. Definieren und erläutern Sie den Begriff des Parameterpunktschätzers.
2. Definieren Sie die Begriffe der Likelihood-Funktion und der Log-Likelihood-Funktion.
3. Definieren Sie den Begriff des Maximum-Likelihood-Schätzers.
4. Erläutern Sie das Vorgehen zur ML-Schätzung für ein parametrisches statistisches Produktmodell.
5. Geben Sie den ML-Schätzer für den Parameter  $\mu$  des Bernoulli-Modells an.
6. Geben Sie den ML-Schätzer für den Parameter  $\mu$  des Normalverteilungsmodells an.
7. Geben Sie den ML-Schätzer für den Parameter  $\sigma^2$  des Normalverteilungsmodells an.
8. Definieren und erläutern Sie den Begriff der Erwartungstreue eines Schätzers.
9. Definieren Sie die Begriffe der Varianz und des Standardfehlers eines Schätzers.
10. Definieren Sie den Begriff der Scorefunktion einer Stichprobe.
11. Definieren Sie den Begriff der Fisher-Information einer Stichprobe.
12. Definieren Sie den Begriff der erwarteten Fisher-Information einer Stichprobe.
13. Geben Sie das Theorem zur Cramér-Rao-Ungleichung wieder.
14. Erläutern Sie den Begriff der Cramér-Rao-Schranke.
15. Definieren Sie den Begriff des MQF eines Schätzers.
16. Geben Sie das Theorem zur Zerlegung des MQF wieder.
17. Erläutern Sie den Begriff der asymptotischen Erwartungstreue eines Schätzers.
18. Erläutern Sie den Begriff der Konsistenz eines Schätzers.
19. Erläutern Sie den Begriff der asymptotischen Normalität eines Schätzers.
20. Erläutern Sie den Begriff der asymptotischen Effizienz eines Schätzers.
21. Nennen Sie fünf Eigenschaften eines ML-Schätzers.

**(11) Konfidenzintervalle**

1. Definieren Sie den Begriff des  $\delta$ -Konfidenzintervalls ( $\delta$ -KIs).
2. Geben Sie zwei Interpretationen eines  $\delta$ -KIs.
3. Erläutern Sie die typischen Schritte zur Konstruktion eines  $\delta$ -KIs.
4. Definieren Sie die  $Z$ -Konfidenzintervallstatistik und geben Sie ihre Verteilung an.
5. Geben Sie das  $\delta$ -KI für den Erwartungswert einer Normalverteilung bei bekannter Varianz an.
6. Definieren Sie die  $U$ -Statistik und geben Sie ihre Verteilung an.
7. Geben Sie das  $\delta$ -KI für den Varianzparameter einer Normalverteilung an.
8. Definieren Sie die  $T$ -Konfidenzintervallstatistik und geben Sie ihre Verteilung an.
9. Geben Sie das  $\delta$ -KI für den Erwartungswert einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz an.

**(12) Hypothesentests**

1. Erläutern Sie die grundlegende Logik statistischer Hypothesentests.
2. Geben Sie die Definition statistischer Hypothesen und eines Testszenarios wieder.
3. Definieren Sie die Begriffe der einfachen und zusammengesetzten Hypothesen.
4. Definieren Sie die Begriffe der einseitigen und zweiseitigen Hypothesen.
5. Definieren Sie den Begriff des Tests.
6. Definieren Sie den Begriff des Standardtests.
7. Definieren Sie den Begriff des kritischen Bereichs eines Tests.
8. Definieren Sie den Begriff des Ablehungsbereichs eines Tests.
9. Definieren Sie den Begriff des kritischen Wert-basierten Tests.
10. Definieren Sie richtige Testentscheidungen, Typ I Fehler und Typ II Fehler.
11. Definieren Sie die Testgütefunktion.
12. Erläutern Sie die Bedeutung der Testgütefunktion im Rahmen der Konstruktion statistischer Tests.
13. Definieren Sie die Begriffe des Signifikanzniveaus und des Level- $\alpha_0$ -Tests.
14. Definieren Sie den Begriff des Testumfangs.
15. Erläutern Sie die prinzipielle Strategie zur Wahl von Null- und Alternativhypothesen in der Wissenschaft.
16. Nennen Sie vier Schritte in der Konstruktion eines Tests.
17. Definieren Sie das statistische Modell eines Z-Tests.
18. Definieren Sie die Hypothesen eines Z-Tests mit einfacher Nullhypothese und zweiseitiger Alternativhypothese.
19. Definieren Sie den zweiseitigen Z-Test.
20. Skizzieren Sie qualitativ Testgütefunktionen eines zweiseitigen Z-Tests für verschiedene kritische Werte.
21. Wie muss der kritische Wert eines zweiseitigen Z-Tests definiert sein, damit der Test ein Level- $\alpha_0$ -Test ist?
22. Skizzieren Sie qualitativ die Bestimmung des kritischen Wertes  $k_{\alpha_0}$  bei einem zweiseitigen Z-Test.
23. Erläutern Sie das praktische Vorgehen zur Durchführung eines zweiseitigen Z-Tests.
24. Von welchen Werten hängt die Powerfunktion eines zweiseitigen Z-Tests ab?
25. Skizzieren Sie qualitativ die Powerfunktion des zweiseitigen Z-Tests bei fester Stichprobengröße.
26. Skizzieren Sie qualitativ die Powerfunktion des zweiseitigen Z-Tests bei festem Erwartungswertparameter.
27. Erläutern Sie das favorisierte praktische Vorgehen zur Durchführung einer Poweranalyse.
28. Erläutern Sie die Motivation zur Auswertung von p-Werten.
29. Definieren Sie den Begriff des p-Werts.
30. Geben Sie das erste Theorem zur Dualität von Konfidenzintervallen und Hypothesentests wieder.
31. Geben Sie das zweite Theorem zur Dualität von Konfidenzintervallen und Hypothesentests wieder.
32. Erläutern Sie die Dualität von Konfidenzintervallen und Hypothesentests.