Ergebnisbericht

Die Klausur zum Modul B1 Deskriptive Statistik im Wintersemester 2021/22 fand am 31.01.2022 von 16.00 - 17.00 Uhr in Hörsaal 6, Gebäude 44 der OVGU mit 58 Teilnehmer:innen statt. Die Klausur bestand aus 30 Multiple Choice Aufgaben mit jeweils vier Antwortmöglichkeiten und jeweils genau einer richtigen Antwort. Die Klausurlösung ist diesem Bericht beigefügt.

Bewertungschema

Die Aufteilung der zugelassenen Noten auf die erreichten Prozentpunkte wurde anhand untenstehender Tabelle vorgenommen. Diese trifft folgende Zuordnung der erreichten Prozentpunkte zu den zugelassenen Noten anhand von geschlossenen Prozentpunktintervallen.

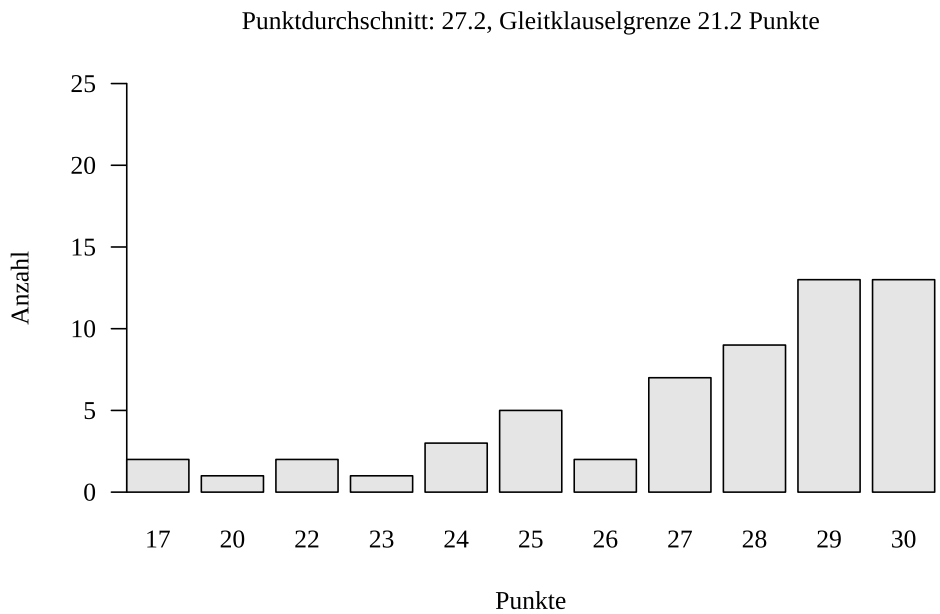
$\leq$	$\geq$	Note
100	95	1,0
94	90	1,3
89	85	1,7
84	80	2,0
79	75	2,3
74	70	2,7
69	65	3,0
64	60	3,3
59	55	3,7
54	50	4,0
49	0	5,0

Es ergibt sich folgendes Punktenotenschema, wobei < 15 Punkte mit 5.0 bewertet wurden.

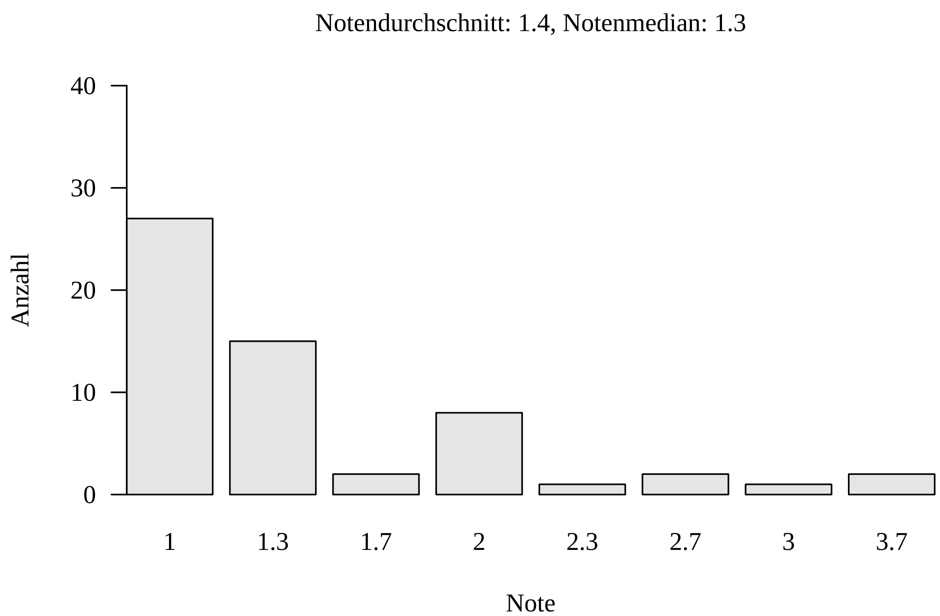
Punkte	Prozent	Note
30	100,0	1,0
29	96,7	1,0
28	93,3	1,3
27	90,0	1,3
26	86,7	1,7
25	83,3	2,0
24	80,0	2,0
23	76,7	2,3
22	73,3	2,7
21	70,0	2,7
20	66,7	3,0
19	63,3	3,3
18	60,0	3,3
17	56,7	3,7
16	53,3	4,0
15	50,0	4,0

Ergebnisse

Die nachfolgende Abbildung zeigt die absolute Häufigkeitsverteilung der erzielten Punkte.



Die nachfolgende Abbildung zeigt die absolute Häufigkeitsverteilung der erreichten Noten.



1. Welche Aussage zu unabhängigen und abhängigen Variablen trifft **nicht** zu?

   a) Unabhängige/abhängige Variablen sind Begriffe experimenteller wissenschaftlicher Prozesse.

   b) Unabhängige Variablen repräsentieren experimentelle Manipulationen.

   X Abhängige Variablen repräsentieren experimentelle Manipulationen.

   c) Abhängige Variablen repräsentieren Ergebnismaße experimenteller Manipulationen.

2. Welche Aussage zu Sinn und Zweck der Wahrscheinlichkeitstheorie trifft zu?

   X Die Wahrscheinlichkeitstheorie dient als mathematisches Modell von Phänomenen, die von Menschen nicht mit absoluter Sicherheit vorhergesagt werden können.

   a) Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist für die Frequentistische Statistik irrelevant.

   b) Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist für die Bayesianische Statistik irrelevant.

   c) Mithilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie lässt sich Unsicherheit nicht quantifizieren.

3. Welche Aussage zu den fundamentalen Annahmen der Frequentistischen Statistik trifft **nicht** zu?

   X Wahrscheinlichkeiten werden als Grade subjektiver Sicherheit interpretiert.

   a) Die Parameter probabilistischer Modelle sind feste, unbekannte Konstanten.

   b) Statistische Methoden sollten gute langfristige relative Frequenzeigenschaften besitzen.

   c) Statistische Methoden werden typischerweise anhand ihrer Stichprobenverteilungen bewertet.

4. Welche Aussage zum Begriff eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ trifft **nicht** zu?

   a) Ω wird Ergebnismenge genannt.

   b) $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra und heißt Ereignissystem.

   X Bei endlicher Ergebnismenge Ω ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ kein geeignetes Ereignissystem.

   c) $\mathbb{P}$ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß.

5. Welche Aussage trifft **nicht** zu? Für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf einer Menge Ω gilt:

   a) $\Omega \in \mathcal{A}$.

   b) $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen unter der Bildung von Komplementärmengen.

   c) $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen unter der abzählbaren Vereinigung von Ereignissen $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$.

   X $\emptyset \notin \mathcal{A}$.

6. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum. Welche Aussage zur Definition einer Wahrscheinlichkeitsfunktion π trifft zu?

   a) $\pi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, A \mapsto \pi(A) := 1$.

   X $\pi : \Omega \to [0,1], \omega \mapsto \pi(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\})$.

   b) $\pi : \mathcal{A} \to [0,1], \omega \mapsto \pi(A) := \mathbb{P}(A)$.

   c) $\pi : \Omega \to [0,1], \omega \mapsto \pi(\omega) := 1 - \mathbb{P}(\{\omega\})$.

7. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum. Welche Aussage zur bedingten Wahrscheinlichkeit von unabhängigen Ereignissen $A, B \in \mathcal{A}$ trifft im Allgemeinen **nicht** zu?

   a) $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

   b) $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)}$.

   c) $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

   X $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B)$.

8. p sei Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Zufallsvariable X. Welche Aussage trifft **nicht** zu?

   a) $p(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   X $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 0$.

   b) $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x)\,dx$ für alle $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$.

   c) $\mathbb{P}(X = a) = \int_a^a p(x)\,dx = 0$.

9. Welche Aussage trifft zu? Für eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist die kumulative Verteilungsfunktion $P : \mathbb{R} \to [0,1]$ von X definiert als

   a) $P(x) := \mathbb{P}(X = x)$.

   b) $P(x) := \mathbb{P}(X \geq x)$.

   X $P(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$.

   c) $P(x) := \mathbb{P}^{-1}(X = x)$.

10. Welche Aussage trifft zu? Zwei Zufallsvariablen X_1, X_2 mit Ergebnisräumen $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ heißen unabhängig, wenn für alle $S_1 \subseteq \mathcal{X}_1$ und $S_2 \subseteq \mathcal{X}_2$ gilt, dass

    a) $\mathbb{P}_X(X_1 \in S_1, X_2 \in S_2) = \mathbb{P}_{X_1}(X_1 \in S_1) + \mathbb{P}_{X_2}(X_2 \in S_2)$.

    b) $\mathbb{P}_X(X_1 \in S_1, X_2 \in S_2) = \frac{\mathbb{P}_{X_1}(X_1 \in S_1)}{\mathbb{P}_{X_2}(X_2 \in S_2)}$.

    X $\mathbb{P}_X(X_1 \in S_1, X_2 \in S_2) = \mathbb{P}_{X_1}(X_1 \in S_1)\mathbb{P}_{X_2}(X_2 \in S_2)$.

    c) $\mathbb{P}_X(X_1 \in S_1, X_2 \in S_2) = \mathbb{P}_{X_1}(X_1 \in S_1) - \mathbb{P}_{X_2}(X_2 \in S_2)$.

11. Es bezeichne $\mathbb{E}(X)$ den Erwartungswert einer Zufallsvariable X. Welche Aussage trifft **nicht** zu?

   a) $\mathbb{E}(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x\, p_X(x)\, dx$, wenn X kontinuierlich mit WDF p_X ist.

   b) Der Erwartungswert ist eine skalare Zusammenfassung einer Verteilung.

   c) Intuitiv ist $\mathbb{E}(X) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ für eine große Zahl n von Kopien X_i von X.

   X Es sei $X \sim \text{Bern}(\mu)$. Dann gilt $\mathbb{E}(X) = \mu^2$.

12. Es bezeichne $\mathbb{V}(X)$ die Varianz einer Zufallsvariable X und es sei $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Dann gilt

   X $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$.

   a) $\mathbb{V}(aX) = a\mathbb{V}(X)$.

   b) $\mathbb{V}(aX) = \mathbb{V}(X)$.

   c) $\mathbb{V}(aX) = \mathbb{V}(X)^2$.

13. Welche Aussage zur Korrelation $\rho(X,Y)$ zweier Zufallsvariablen X und Y trifft zu?

   a) $\rho(X,Y) = \frac{\mathbb{C}(X,Y)}{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(X)}$.

   b) Es gilt ausschließlich $0 \le \rho(X,Y) \le 1$.

   c) Wenn $\rho(X,Y) = 0$ gilt, dann sind X und Y immer unabhängige Zufallsvariablen.

   X Wenn X und Y unabhängige Zufallsvariablen sind, dann gilt immer $\rho(X,Y) = 0$.

14. Es sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ und Varianz $\mathbb{V}(X)$. Die Chebyshev Ungleichung besagt, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass

   a) $\mathbb{P}(X \ge x) \le \frac{\mathbb{E}(X)}{x}$.

   X $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \ge x) \le \frac{\mathbb{V}(X)}{x^2}$.

   b) $\mathbb{P}(X \ge x) \le \mathbb{E}(X)$.

   c) $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \le x) \le \mathbb{V}(X)$.

15. Es seien X und Y zwei Zufallsvariablen und $\mathbb{E}(XY)$ sei endlich. Die Cauchy-Schwarz Ungleichung besagt dann, dass

   a) $\mathbb{E}(XY) \le \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$

   X $\mathbb{E}(XY)^2 \le \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(Y^2\right)$

   b) $\mathbb{E}(XY)^2 \ge \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(Y^2\right)$

   c) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$

16. Es seien $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ und $Y := \frac{X-\mu}{\sigma}$. Welche Aussage zur Verteilung von Y trifft dann zu?

    a) $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.
    b) $Y \sim N(0, \sigma^2)$.
    c) $Y \sim N(\mu, \sigma^2/n)$.
    X $Y \sim N(0, 1)$.

17. Welche Aussage zu Statistiken und Schätzern trifft **nicht** zu?

    a) Statistiken sind Abbildungen aus dem Stichprobenraum in einen anderen Raum.
    b) Das Stichprobenmittel ist eine Statistik.
    c) Parameterschätzer sind Abbildungen aus dem Stichprobenraum in den Parameterraum.
    X Beobachtungen und Statistiken werden mathematisch nie als Zufallsvariablen modelliert.

18. $\mathcal{M}$ sei ein parametrisches statistisches Produktmodell mit WMF oder WDF p_θ, so dass $X_1, ..., X_n \sim p_\theta$ gilt. Dann ist die Log-Likelihood-Funktion $\ell_n : \Theta \to \mathbb{R}$ definiert als

    a) $\ell_n(x_i) := \prod_{i=1}^n p_\theta(x_i)$.
    b) $\ell_n(\theta) := \prod_{i=1}^n p_\theta(x_i)$.
    c) $\ell_n(\theta) := \ln \sum_{i=1}^n p_\theta(x_i)$.
    X $\ell_n(\theta) := \ln \prod_{i=1}^n p_\theta(x_i)$.

19. Welche Aussage zu den ML Schätzern eines Normalverteilungsmodells trifft **nicht** zu?

    a) $\hat{\mu}_n^{\text{ML}}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.
    b) $\hat{\mu}_n^{\text{ML}}$ ist identisch mit dem Stichprobenmittel $\bar{X}_n$.
    X $\hat{\sigma}_n^{2^{\text{ML}}}(x) := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_n^{\text{ML}})^2$
    c) $\hat{\sigma}_n^{2^{\text{ML}}}$ ist nicht identisch mit der Stichprobenvarianz S_n^2.

20. $X_1, ..., X_n \sim p_\theta$ sei eine Stichprobe und $\hat{\tau}_n$ sei ein Schätzer für τ. Welche Aussage zum Begriff eines erwartungstreuen Schätzer trifft dann zu?

    X $\hat{\tau}_n$ heißt erwartungstreu, wenn $\mathbb{E}_\theta(\hat{\tau}_n(X)) = \tau(\theta)$ für alle $\theta \in \Theta, n \in \mathbb{N}$.
    a) $\hat{\tau}_n$ heißt erwartungstreu, wenn $\mathbb{E}_\theta(\hat{\tau}_n(X)) = \theta$ für alle $\theta \in \Theta, n \in \mathbb{N}$.
    b) $\hat{\tau}_n$ heißt erwartungstreu, wenn $\mathbb{E}_\theta(\hat{\tau}_n(X)) = \tau(\theta)$ für mindestens ein $\theta \in \Theta$ und ein $n \in \mathbb{N}$.
    c) $\hat{\tau}_n$ heißt erwartungstreu, wenn $\mathbb{E}_\theta(\hat{\tau}_n(X)) = 0$ für alle $\theta \in \Theta, n \in \mathbb{N}$.

21. Welche Aussage zur Cramér-Rao Schranke trifft **nicht** zu?

    a) Die Cramér-Rao-Ungleichung gibt eine untere Schranke für die Varianz erwartungstreuer Schätzer an.

    b) Für $\tau(\theta) = \theta$ gilt $\mathbb{V}_\theta(\hat{\theta}_n) \geq \frac{1}{J(\theta)}$.

    X In der Cramér-Rao-Ungleichung bezeichnet $J(\theta)$ die Scorefunktion einer Zufallsvariable.

    c) Ein erwartungstreuer Schätzer mit Varianz gleich der in der Cramér-Rao-Ungleichung gegebenen unteren Schranke hat die kleinstmögliche Varianz aller erwartungstreuen Schätzer.

22. Welche Aussage zu Maximum Likelihood Schätzern trifft **nicht** zu?

    X Maximum Likelihood Schätzer sind immer erwartungstreu.

    a) Maximum Likelihood Schätzer sind konsistent.

    b) Maximum Likelihood Schätzer sind asymptotisch normalverteilt.

    c) Maximum Likelihood Schätzer sind asymptotisch erwartungstreu.

23. Es sei $X = X_1, ..., X_n \sim p_\theta$ eine Stichprobe, $\delta \in]0,1[$, und $G_u(X)$ und $G_o(X)$ seien zwei Statistiken. Welche Aussage zu einem δ-Konfidenzintervall $C_n := [G_u, G_o]$ trifft dann **nicht** zu?

    a) Es gilt $\mathbb{P}_\theta\left(C_n \ni \theta\right) = \delta$ für alle $\theta \in \Theta$.

    b) C_n ist ein zufälliges Intervall, weil $G_u(X)$ und $G_o(X)$ Zufallsvariablen sind.

    X C_n ist ein zufälliges Intervall, weil $\theta \in \Theta$ eine Zufallsvariable ist.

    c) Wird ein Experiment unter gleichen Umständen häufig wiederholt, so überdeckt das zugehörige δ-Konfidenzintervall den wahren, aber unbekannten Parameterwert θ in $\delta \cdot 100\%$ der Fälle.

24. Welche Aussage zu den typischen Schritten in der Konstruktion eines Konfidenzintervalls trifft **nicht** zu?

    a) Zur Konstruktion eines Konfidenzintervalls definiert man eine Konfidenzintervallstatistik

    b) Zur Konstruktion eines Konfidenzintervalls analysiert man die (frequentistische) Verteilung der Konfidenzintervallstatistik.

    c) Basierend auf der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik etabliert man die Konfidenzbedingung.

    X Ein statistisches Modell wird zur Konstruktion eines Konfidenzintervalls nicht benötigt.

25. Welche Aussage zum δ-Konfidenzintervall

$$K_n := \left[\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_\delta, \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_\delta\right]. \tag{1}$$

    für den Erwartungswertparameter einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz trifft zu?

    a) $\bar{X}_n$ bezeichnet den Stichprobenmedian.

    b) S_n bezeichnet die Stichprobenvarianz.

    c) n bezeichnet das Stichprobenmittel.

    X t_δ ist definiert als $\psi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right)$, wobei ψ^{-1} die inverse kumulative Verteilungsfunktion einer t-verteilten Zufallvariable mit Freiheitsgradparameter $n-1$ bezeichnet.

26. Welche Aussage zur grundlegenden Logik statistischer Hypothesentests trifft **nicht** zu?

    a) Ein vorliegender Datensatz wird als Realisation einer Stichprobe konzeptualisiert.

    b) Man berechnet basierend auf dem Datensatz eine Teststatistik.

    X Ist die betrachtete Wahrscheinlichkeit dafür, den beobachteten oder einen extremeren Wert der Teststatistik unter Annahme eines Nullmodells zu observieren groß, so verwirft man die Hypothese, dass das Nullmodell die Daten generiert haben könnte.

    c) Wie in der frequentistischen Statistik üblich, weiß man nach Durchführung der Testprozedur nicht, ob im vorliegenden Fall das Nullmodel oder ein anderes Modell die Daten generiert hat.

27. Θ sei der Parameterraum eines statistischen Modells. Welche Aussage zu den statistischen Hypothesen Θ_0 und Θ_1 trifft zu?

    a) Es gilt immer $0 \in \Theta_0$.

    b) Es gilt $\Theta = \Theta_0 \cap \Theta_1$.

    c) Enthält Θ_1 mehr als ein Element, so heißt Θ_1 einfach.

    X Bei einer einfachen Hypothese ist die Verteilung der Stichprobe genau festgelegt.

28. Welche Aussage zu Hypothesentests trifft **nicht** zu?

    a) Ein Test ist eine Abbildung aus dem Ergebnisraum $\mathcal{X}$ einer Stichprobe nach $\{0, 1\}$.

    b) Formal hat ein Test die Form $\phi : \mathcal{X} \to \{0, 1\}, x \mapsto \phi(x)$.

    c) Der Testwert $\phi(x) = 0$ repräsentiert den Vorgang des Nichtablehnens der Nullhypothese.

    X Weil die Stichprobe ein Zufallsvektor ist, ist ein Test keine Zufallsvariable.

29. Welche Aussage zur Definition von eines Level-α_0-Tests, eines Signifikanzlevels α_0 und des Testumfangs α trifft zu?

    X Die Zahl $\alpha := \max_{\theta \in \Theta_0} q_\phi(\theta) \in [0, 1]$ heißt der Testumfang von ϕ.

    a) Für alle Tests gilt immer $\alpha = \alpha_0$.

    b) Ein Test, für den gilt, dass seine Gütefunktion nur den Wert 0 annimmt, heißt Level-α_0-Test.

    c) α ist die kleinstmögliche Wahrscheinlichkeit für einen Typ I Fehler.

30. Welche Aussage zur Definition einer Testgütefunktion trifft **nicht** zu?

    a) Die Testgütefunktion ist eine Funktion des wahren, aber unbekannten Parameters.

    b) Der Wert der Testgütefunktion entspricht der Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Test den Wert 1 annimmt.

    c) Die Testgütefunktion nimmt Werte im Intervall $[0, 1]$ an.

    X Die Testgütefunktion kann nur zur Analyse der Power eines Testes, nicht aber zur Testumfangkontrolle genutzt werden.