Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2021/22

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(8) Transformationen der Normalverteilung

Vorbemerkungen

Transformationstheoreme

Standardtransformationen

- Summentransformation
- Mittelwerttransformation
- Z-Transformation
- χ^2-Transformation
- T-Transformation
- F-Transformation

Selbstkontrollfragen

Vorbemerkungen

Transformationstheoreme

Standardtransformationen

- Summentransformation
- Mittelwerttransformation
- Z-Transformation
- χ^2-Transformation
- T-Transformation
- F-Transformation

Selbstkontrollfragen

Realisierungen von Zufallsvariablen

Der einzelne Wert, den eine Zufallsvariable bei der Durchführung eines Zufallsexperiments annimmt, heißt eine **Realisierung der Zufallsvariable**. Mithilfe eines Computers lassen sich Zufallsexperimente simulieren und Realisierungen von Zufallsvariablen erhalten.

Realisierungen von normalverteilten Zufallsvariablen erhält man in R mit `rnorm()`, wobei die Syntax für Realisierungen von n unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen $X_i \sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, ..., n$ durch `rnorm(n,mu,sigma)` gegeben ist.

```r
rnorm(1,0,1)                       # X1 \sim N(0,1)
```

```
[1] -1.4
```

```r
rnorm(1,10,1)                      # X1 \sim N(10,1)
```

```
[1] 10.3
```

```r
rnorm(3,5,sqrt(2))                 # Xi \sim N(5,2), i = 1,2,3 (u.i.v.)
```

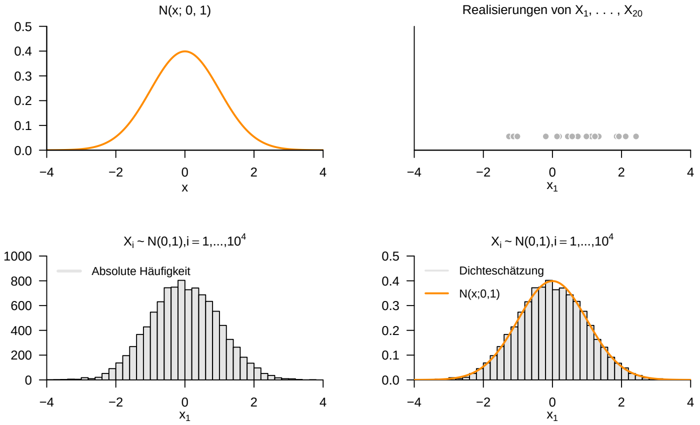
```
[1] 1.55 4.99 5.88
```

```r
rnorm(1e1,5,sqrt(2))               # Xi \sim N(5,2), i = 1,...,10 (u.i.v.)
```

```
 [1] 6.62 2.42 4.65 4.65 4.60 4.22 5.89 7.92 2.69 5.72
```

Realisierungen von Zufallsvariablen

Die empirische Verteilung unabhängig und identisch simulierter Zufallsvariablenrealisationen entspricht der Verteilung der Zufallsvariable. Die empirische Verteilung stellt man mit Histogrammen (Häufigkeitsverteilungen) oder histogrammbasierten Dichteschätzern dar.



Vorbemerkungen

Transformation von Zufallsvariablen

Inhalt dieser Vorlesungseinheit sind einige Gesetzmäßigkeiten zur Transformation von normalverteilten Zufallsvariablen. Mit *Transformation* ist hier die Anwendung einer Funktion auf Zufallsvariablen sowie die arithmetische Verknüpfung mehrerer Zufallsvariablen gemeint. Die zentrale Fragestellung dabei ist folgende: "Wenn die Zufallsvariable X normalverteilt ist, wie ist dann eine Zufallsvariable Y, die sich durch Transformation von X ergibt, verteilt?"

Für die in dieser Vorlesungseinheit behandelten Fälle gilt, dass man explizit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für die Verteilung der transformierten Zufallsvariable angeben kann. Diese gehören zu den klassischen Resultaten der frequentistischen Inferenz und sind für das Verständnis von Konfidenzintervallen, Hypothesentests, und Varianzanalysen essentiell.

Intuitiv kann man sich die Transformation einer Zufallsvariable anhand der Transformation ihrer u.i.v. Realisierungen klar machen. Betrachtet man z.B. $X \sim N(0,1)$ und ihre Transformation $Y := X^2$ und sind $x_1 = 0.10, x_2 = -0.20, x_3 = 0.80$ drei u.i.v. Realisierungen von X, so entspricht dies den u.i.v. Realisierungen $y_1 = x_1^2 = 0.01, y_2 = x_2^2 = 0.04, y_3 = x_3^2 = 0.64$ von Y. In diesem Beispiel fällt auf, dass Y keine negativen Werte annimmt, die Verteilung von Y ordnet negativen Werten daher Wahrscheinlichkeitsdichten von 0 zu.

Simulation der Transformation normalverteilter Zufallsvariablen in R

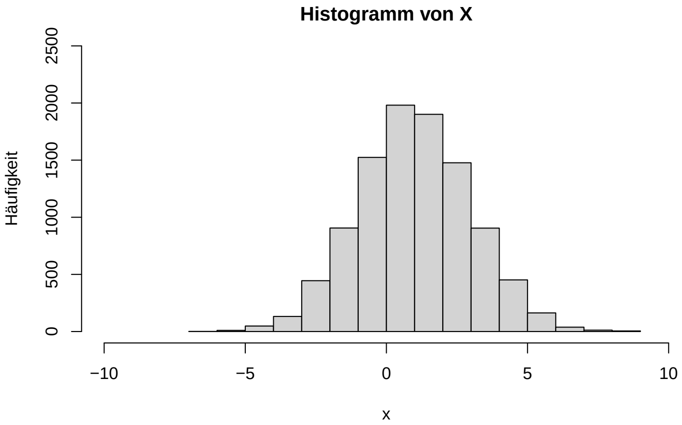
```
# Simulationsspezifikation
n       = 1e4                    # Anzahl von u.i.v Realisierungen (ZVen)
mu      = 1                      # Erwartungswertparameter von X
sigsqr  = 2                      # Varianzparameter von X

# Quadrieren einer Zufallsvariable
X       = rnorm(n, mu, sigsqr)   # Realisierungen xi, i = 1,....,n von X
Y       = X^2                    # Realisierungen yi = xi^2 von Y

# Ausgabe der ersten acht Werte
print(X[1:8], digits = 2)
```

```
[1] -2.726 -0.044  0.895  2.086 -0.828  1.936  1.726 -1.609
```

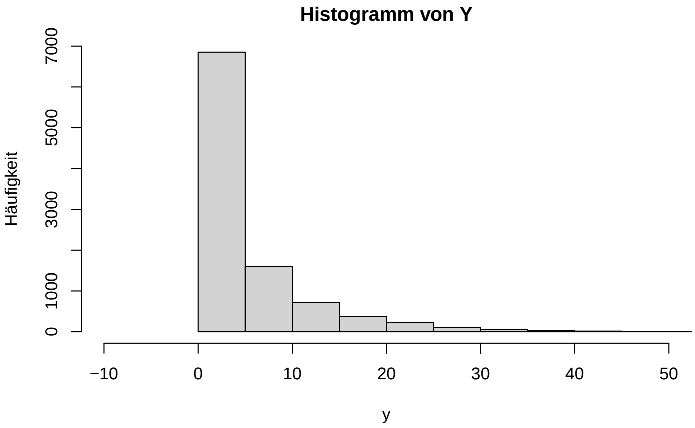
```
print(Y[1:8], digits = 2)
```

```
[1] 7.4312 0.0019 0.8007 4.3514 0.6858 3.7493 2.9787 2.5892
```

Simulation der Transformation normalverteilter Zufallsvariablen in R



Simulation der Transformation normalverteilter Zufallsvariablen in R



Überblick

Im Abschnitt **Transformationstheoreme** stellen wir zunächst einige generelle Werkzeuge zum Berechnen der WDFen von transformierten Zufallsvariablen bereit. Diese Werkzeuge sind von der allgemeinen Form "Wenn X eine Zufallsvariable mit WDF p_X und $Y := f(X)$ die durch f transformierte Zufallsvariable ist, dann gilt für die WDF von Y die folgende Formel: $p_Y := \{\text{Formel}\}$."

Im Abschnitt **Standardtransformationen** diskutieren wir sechs Standardtransformationen normalverteilter Zufallsvariablen, die in der frequentistischen Inferenz und damit im weiteren Verlauf des Kurses zentrale Rollen spielen. Diese Aussagen sind von der allgemeinen Form "Wenn $X_i, i = 1, ..., n$ unabhängig und identisch normalverteilte Zufallsvariablen sind und $Y := f(X_1, ..., X_n)$ eine Transformation dieser Zufallsvariablen ist, dann ist die WDF von Y durch die Formel $p_Y := \{\text{Formel}\}$ gegeben und man nennt die Verteilung von Y *Verteilungsname*."

Die Aussagen im Abschnitt **Standardtransformationen** sind für die frequentistische Inferenz zentral, weil

(1) die Zentralen Grenzwertsätze die Annahme additiv unabhängig normalverteilter Störvariablen, und damit normalverteilter Daten, rechtfertigt,
(2) wie wir in der nächsten Vorlesungseinheit sehen werden, es sich bei Schätzern und Statistiken um Transformationen von Zufallsvariablen handelt, und
(3) Konfidenzintervalle und Hypothesentests durch die Verteilungen ihrer jeweiligen Statistiken charakterisiert und gerechtfertigt sind.

Vorbemerkungen

Ausblick

Das probabilistische Standardmodell von n Datenpunkten hat die Form

$$X_i := \mu_i + \varepsilon_i, i = 1, ..., n \tag{1}$$

Die Zufallsvariable X_i dient dabei als das Modell des $i$ten Datenpunktes $x_i \in \mathbb{R}$, d.h. x_i wird also als Realisierung von X_i modelliert. Die Normalverteilung $X_i \sim N(\mu_i, \varepsilon)$ der Zufallsvariable X_i ergibt sich dabei wie wir später sehen werden aus der linear-affinen Transformation der Zufallsvariable ε unter der Abbildung $f(\varepsilon) := \mu_i + \varepsilon_i$

$\mu_i \in \mathbb{R}$ repräsentiert den deterministischen Aspekt des Datenpunktmodells und liefert die theoretische Erklärung für den Wert von x_i. $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ dagegen repräsentiert den stochastischen Aspekt desDatenpunktmodells und liefert im Sinne der Zentralen Grenzwertsätzte die theoretischer Erklärung für die Differenz von μ_i und x_i als Resultat der Addition vieler weiterer Einflüsse in der Generation von x_i über μ_i hinaus.

Statistiken und Schätzer, also Funktionen von $X_i, i = 1, ..., n$, entsprechen damit im probabilistischen Standardmodell Transformationen von normalverteilten Zufallsvariablen.

Vorbemerkungen

Transformationstheoreme

Standardtransformationen

- Summentransformation
- Mittelwerttransformation
- Z-Transformation
- χ^2-Transformation
- T-Transformation
- F-Transformation

Selbstkontrollfragen

Überblick

Das **univariate WDF Transformationstheorem bei bijektiven Abbildungen** liefert eine Formel zur Berechnung der WDF p_Y von $Y := f(X)$, wenn X eine Zufallsvariable mit WDF p_X ist und f eine bijektive Funktion ist.

Das **univariate WDF Transformationstheorem bei linear affinen Abbildungen** gibt eine Formel zur Berechnung der WDF p_Y von $Y := f(X)$ an, wenn X eine Zufallsvariable mit WDF p_X ist und f eine linear-affine Funktion ist.

Das **univariate WDF Transformationstheorem bei stückweisen bijektiven Abbildungen** gibt eine Formel zur Berechnung der WDF p_Y von $Y := f(X)$ an, wenn X eine Zufallsvariable mit WDF p_X ist und f zumindest in Teilen bijektiv ist.

Das **multivariate WDF Transformationstheorem bei bijektiven Abbildungen** liefert eine Formel zur Berechnung der WDF p_Y von $Y := f(X)$, wenn X ein Zufallsvektor mit WDF p_X ist und f eine bijektive multivariate vektorwertigeFunktion ist.

Das **Faltungstheorem** liefert eine Formel zur Berechnung der WDF p_Y von $Y := X_1 + X_2$, wenn X_1 und X_2 zwei Zufallsvariablen mit WDFen p_{X_1} und p_{X_2} sind.

Theorem (Univariate WDF Transformation bei bijektiven Abbildungen)

X sei eine Zufallsvariable mit WDF p_X für die $\mathbb{P}(]a,b[) = 1$ gilt, wobei a und/oder b entweder endlich oder unendlich seien. Weiterhin sei

$$Y := f(X) \tag{2}$$

wobei die univariate reellwertige Funktion $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und bijektiv auf $]a,b[$ sei. $f(]a,b[)$ sei das Bild von $]a,b[$ unter f. Schließlich sei $f^{-1}(y)$ der Wert der Umkehrunktion von $f(x)$ für $y \in f(]a,b[)$ und $f'(x)$ sei die Ableitung von f an der Stelle x. Dann ist die WDF von Y gegeben durch

$$p_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, y \mapsto p_Y(y) := \begin{cases} \frac{1}{|f'(f^{-1}(y))|} p_X\left(f^{-1}(y)\right) & \text{für } y \in f(]a,b[) \\ 0 & \text{für } y \in \mathbb{R} \setminus f(]a,b[). \end{cases} \tag{3}$$

Bemerkungen

- Linear-affine Abbildungen sind ein wichtiger Anwendungsfalls.
- Die Z-Transformation ist ein wichtiger Anwendungsfall.

Transformationstheoreme

Beweis

Wir halten zunächst fest, dass weil f eine differenzierbare bijektive Funktion auf $]a,b[$ ist, f entweder strikt wachsend oder strikt fallend ist. Nehmen wir zunächst an, dass f auf $]a,b[$ strikt wachsend ist. Dann ist auch f^{-1} für alle $y \in f(]a,b[)$ wachsend, und es gilt

$$P_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(f(X) \le y) = \mathbb{P}\left(f^{-1}(f(X)) \le f^{-1}(y)\right) = \mathbb{P}\left(X \le f^{-1}(y)\right) = P_X\left(f^{-1}(y)\right).$$

P_Y ist also differenzierbar an allen Stellen y, an denen sowohl f^{-1} als auch P_X differenzierbar sind. Mit der Kettenregel und dem Satz von der Umkehrabbildung $(f^{-1}(x))' = 1/f'(f^{-1}(x))$, folgt dann, dass die WDF p_Y sich ergibt wie folgt:

$$p_Y(y) = \frac{d}{dy}P_Y(y) = \frac{d}{dy}P_X\left(f^{-1}(y)\right) = p_X\left(f^{-1}(y)\right)\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}p_X\left(f^{-1}(y)\right),$$

Weil f^{-1} strikt wachsend ist, ist $d/dy(f^{-1}(y))$ positiv und das Theorem trifft zu. Analog gilt, dass wenn f auf $]a,b[$ strikt fallend ist, dann ist auch f^{-1} für alle $y \in f(]a,b[)$ fallend und es gilt

$$P_Y(y) = \mathbb{P}(f(X) \le y) = \mathbb{P}\left(f^{-1}(f(X)) \ge f^{-1}(y)\right) = \mathbb{P}\left(X \ge f^{-1}(y)\right) = 1 - P_X\left(f^{-1}(y)\right),$$

Mit der Kettenregel und dem Satz von der Umkehrabbildung folgt dann

$$p_Y(y) = \frac{d}{dy}(1-P_Y(y)) = -\frac{d}{dy}P_X\left(f^{-1}(y)\right) = -p_X\left(f^{-1}(y)\right)\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = -\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}p_X\left(f^{-1}(y)\right).$$

Weil f^{-1} strikt fallend ist, ist $d/dy(f^{-1}(y))$ negativ, so dass $-d/dy(f^{-1}(y))$ gleich $|d/dy(f^{-1}(y))|$ ist und das Theorem trifft zu.

Theorem (Univariate WDF Transformation bei linear-affinen Abbildungen)

X sei eine Zufallsvariable mit WDF p_X und es sei

$$Y = f(X) \text{ mit } f(X) := aX + b \text{ für } a \neq 0. \tag{4}$$

Dann ist die WDF von Y gegeben durch

$$p_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, y \mapsto p_Y(y) := \frac{1}{|a|} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right). \tag{5}$$

Bemerkung

- Das Theorem folgt direkt WDF Transformationstheorem bei bijektiven Abbildungen.
- Die Z-Transformation ist ein wichtiger Anwendungsfall.

Beweis

Wir halten zunächst fest, dass

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a} \tag{6}$$

ist, weil dann $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ gilt, wie man anhand von

$$f(f^{-1}(x)) = a\left(\frac{x-b}{a}\right) + b = x - b + b = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \tag{7}$$

einsieht. Wir halten weiterhin fest, dass

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x) = \frac{d}{dx}(ax+b) = a. \tag{8}$$

Also folgt mit dem Theorem zur WDF Transformation bei bijektiven Abbildungen, dass

$$\begin{aligned} p_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, y \mapsto p_Y(y) &= \frac{1}{|f'\left(f^{-1}(y)\right)|} p_X\left(f^{-1}(y)\right) \\ &= \frac{1}{|a|} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

$\square$

Theorem (WDF Transformation bei stückweise bijektiven Abbildungen)

X sei eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathcal{X}$ und WDF p_X. Weiterhin sei

$$Y = f(X), \tag{10}$$

wobei f so beschaffen sei, dass der Ergebnisraum von X in eine endliche Anzahl von Mengen $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_k$ mit einer entsprechenden Anzahl von Mengen $\mathcal{Y}_1 := f(\mathcal{X}_1), ..., \mathcal{Y}_k := f(\mathcal{X}_k)$ im Ergebnisraum $\mathcal{Y}$ von Y partitioniert werden kann (wobei nicht notwendigerweise $\mathcal{Y}_i \cap \mathcal{Y}_j = \emptyset, 1 \le i, j \le k$ gelten muss), so dass die Abbildung f für alle $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_k$ bijektiv ist (d.h. f ist eine *stückweise* bijektive Abbildung). Für $i = 1, ..., k$ bezeichne f_i^{-1} die Umkehrfunktion von f auf $\mathcal{Y}_i$. Schließlich nehmen wir an, dass die Ableitungen f_i' für alle $i = 1, ..., k$ existieren und stetig sind. Dann ist eine WDF von Y durch

$$p_Y : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}_{\ge 0}, y \mapsto p_Y(y) := \sum_{i=1}^{k} 1_{\mathcal{Y}_i}(y) \frac{1}{|f_i'(f_i^{-1}(y))|} p_X\left(f_i^{-1}(y)\right). \tag{11}$$

gegeben.

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Die χ^2-Transformation ist ein wichtiger Anwendungsfall.

Theorem (Multivariate WDF Transformation bei bijektiven Abbildungen)

X sei ein n-dimensionaler Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathbb{R}^n$ und WDF p_X. Weiterhin sei

$$Y := f(X), \tag{12}$$

wobei die multivariate vektorwertige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar und bijektiv auf $]a, b[$ sei. Schließlich seien

$$J^f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x)\right)_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n} \in \mathbb{R}^{n \times n} \tag{13}$$

die Jacobi-Matrix von f an der Stelle $x \in \mathbb{R}^n$, $|J^f(x)|$ die Determinante von $J^f(x)$, und es sei $|J^f(x)| \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist eine WDF von Y durch

$$p_Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0}, y \mapsto p_Y(y) := \begin{cases} \frac{1}{|J^f\left(f^{-1}(y)\right)|} p_X\left(f^{-1}(y)\right) & \text{for } y \in f(\mathbb{R}^n) \\ 0 & \text{for } y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{14}$$

gegeben.

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Es handelt sich um eine direkte Generalisierung des univariaten Falls.
- Die T-und F-Transformationen sind wichtige Anwendungsfälle.

Theorem (Summe unabhängiger Zufallsvariable, Faltung)

X_1 und X_2 seien zwei kontinuierliche unabhängige Zufallsvariablen mit WDF p_{X_1} und p_{X_2}, respektive. $Y := X_1 + X_2$ sei die Summe von X_1 und X_2. Dann ergibt sich eine WDF der Verteilung von Y als

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1}(y - x_2)p_{X_2}(x_2)\,dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(y - x_1)\,dx_1 \qquad (15)$$

Die Formel für die WDF p_Y heißt *Faltung* oder *Konvolution* von p_{X_1} und p_{X_2}.

Bemerkung

- Die Summen- und Mittelwerttransformation sind wichtige Anwendungsfälle.

Beweis

Wir nutzen das multivariate WDF Transformationstheorem für bijektive Abbildungen. Dazu definieren wir zunächst

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto f(x) := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Die inverse Funktion von f ist dann gegeben durch

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, z \mapsto f(z) := \begin{pmatrix} z_1 - x_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

weil dann $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ gilt, wie man anhand von

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

einsieht. Die Jacobimatrix von f ergibt sich zu

$$J^f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(x) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 + x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 + x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} x_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

und die Jacobideterminante damit zu $|J^f(x)| = 1$.

Beweis (fortgeführt)

Wir halten weiterhin fest, dass die Unabhängigkeit von X_1 und X_2 impliziert, dass

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = p_{X_1}(x_1)p(X_2)(x_2) \tag{20}$$

impliziert. Einsetzen und Integration hinsichtlich x_2 ergibt dann ergibt dann für $z \in f(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= \frac{1}{|J^f\left(f^{-1}(z)\right)|} p_X\left(f^{-1}(z)\right) \\ &= \frac{1}{1} p_{X_1,X_2}(z_1 - x_2, x_2) \\ &= p_{X_1}(z_1 - x_2)p_{X_2}(x_2) \end{aligned} \tag{21}$$

Integration über x_2 ergibt dann eine WDF für die marginale Verteilung von Z_1

$$p_{Z_1}(z_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1}(z_1 - x_2)p_{X_2}(x_2)\,dx_2 \tag{22}$$

Mit $Z_1 = X_1 + X_2 = Y$ ergibt sich dann die erste Form des Faltungstheorems zu

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1}(y - x_2)p_{X_2}(x_2)\,dx_2. \tag{23}$$

$\square$

Vorbemerkungen

Transformationstheoreme

Standardtransformationen

- Summentransformation
- Mittelworttransformation
- Z-Transformation
- χ^2-Transformation
- T-Transformation
- F-Transformation

Selbstkontrollfragen

Standardtransformationen

Überblick

Das **Summentransformationstheorem** besagt, dass die Summe unabhängig normalverteilter Zufallsvariablen wiederum normalverteilt ist und gibt die Parameter dieser Verteilung an.

Das **Mittewertstransformationstheorem** besagt, dass das Stichprobenmittel unabhängig normalverteilter Zufallsvariablen wiederum normalverteilt ist und gibt die Parameter dieser Verteilung an.

Das Z-**Transformationstheorem** besagt, dass Subtraktion des Erwartungswertparameters und gleichzeitige Division mit der Wurzel des Varianzsparameters die Verteilung einer normalverteilten Zufallsvariable in eine Standardnormalverteilung transformiert.

Das χ^2-**Transformationstheorem** besagt, dass die Summe quadrierter unabhängiger standardnormalverteilter Zufallsvariablen eine χ^2-verteilte Zufallsvariable ist.

Das T-**Transformationstheorem** besagt, dass die Zufallsvariable, die sich durch Division einer standardnormalverteilten Zufallsvariable durch die Quadratwurzel einer χ^2-verteilten Zufallsvariable geteilt durch ein n, ergibt, eine t-verteilte Zufallsvariable ist.

Das F-**Transformationstheorem** besagt, dass die Zufallsvariable, die sich durch Division zweier χ^2 verteilter Zufallsvariablen, jeweils geteilt durch ihre jeweiligen Freiheitsgradparameter, ergibt eine F-verteilte Zufallsvariable ist.

Vorbemerkungen

Transformationstheoreme

Standardtransformationen

- **Summentransformation**
- Mittelwerttransformation
- Z-Transformation
- χ^2-Transformation
- T-Transformation
- F-Transformation

Selbstkontrollfragen

Theorem (Summe unabhängig normalverteilter Zufallsvariablen)

Für $i = 1, ..., n$ seien $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen. Dann gilt für die Summe $Y := \sum_{i=1}^n X_i$, dass

$$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right) \tag{24}$$

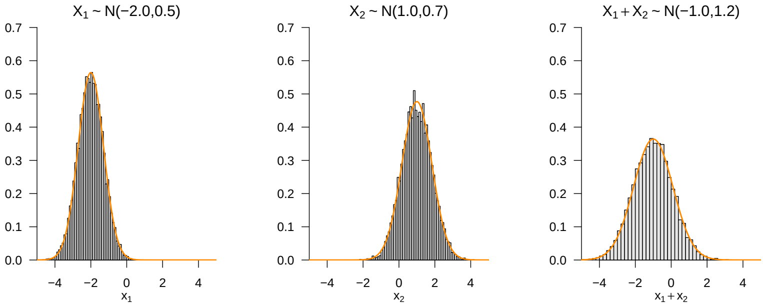
Für unabhängige und identisch normalverteilte Zufallsvariablen $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ gilt folglich

$$Y \sim N(n\mu, n\sigma^2). \tag{25}$$

Bemerkungen

- Die Mittelwerttransformation ist ein wichtiger Anwendungsfall.
- Die Generalisierung der zentralen Grenzwertsätze sind wichtige Anwendungsfälle.

Summentransformation



Summentransformation

Beweis

Wir skizzieren mithilfe der Faltungsformel, dass für $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, und $Y := X_1 + X_2$ gilt, dass $Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. Für $n > 2$ folgt das Theorem dann durch Iteration. Mit der Definition der WDF der Normalverteilung erhalten wir zunächst

$$
\begin{aligned}
p_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(y - x_1)\, dx_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y - x_1 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right) dx_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{y - x_1 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right) dx_1 .
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Mit einigem algebraischen Aufwand erhält man die Identität

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{y - x_1 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \\
&\qquad = -\frac{(y - \mu_1 - \mu_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} - \frac{((\sigma_1^2 + \sigma_2^2)x_1 - \sigma_1^2 y + \mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)},
\end{aligned}
\tag{27}
$$

so dass weiterhin gilt, dass

Beweis (fortgeführt)

$$
\begin{aligned}
p_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{(y-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - \frac{((\sigma_1^2+\sigma_2^2)x_1 - \sigma_1^2 y + \mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)\,dx_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{(y-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right) \exp\left(-\frac{((\sigma_1^2+\sigma_2^2)x_1 - \sigma_1^2 y + \mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)\,dx_1 \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{(y-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{((\sigma_1^2+\sigma_2^2)x_1 - \sigma_1^2 y + \mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)\,dx_1 .
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Summentransformation

Beweis (fortgeführt)

Für das verbleibende Integral zeigt man mithilfe der Integration durch Substitution, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{((\sigma_1^2+\sigma_2^2)x_1 - \sigma_1^2 y + \mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)\,dx_1 = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}. \tag{29}$$

Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\frac{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\exp\left(-\frac{(y-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right) \\ &= \frac{(2\pi)^{-1}(2\pi)^{2}}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\exp\left(-\frac{(y-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\exp\left(-\frac{(y-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Summentransformation

Beweis (fortgeführt)

Schließlich folgt, dass

$$
\begin{aligned}
p_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\,(y - (\mu_1 + \mu_2))^2\right) \\
&= N(y; \mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Ein einfacheres Vorgehen ergibt sich vermutlich nach Fouriertransformation der WDF im Sinne der sogenannten charakteristischen Funktion einer Zufallsvariable. In diesem Fall würde die Faltung der WDFen der Multiplikation der charakteristischen Funktionen entsprechen.

□

Vorbemerkungen

Transformationstheoreme

Standardtransformationen

- Summentransformation
- **Mittelwerttransformation**
- Z-Transformation
- χ^2-Transformation
- T-Transformation
- F-Transformation

Selbstkontrollfragen

Theorem (Stichprobenmittel von u.i.v. normalverteilten Zufallsvariablen)

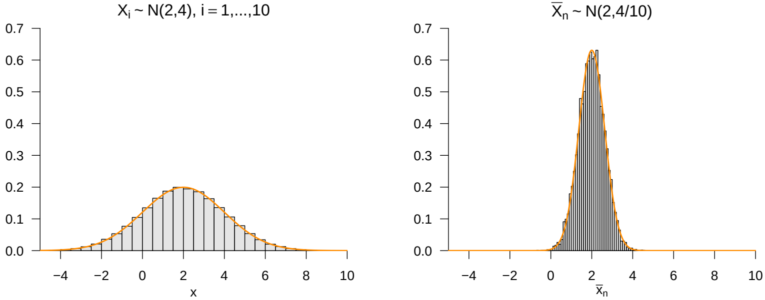
Für $i = 1, ..., n$ seien $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ unabhängig und identisch normalverteilte Zufallsvariablen. Dann gilt für das Stichprobenmittel $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, dass

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right). \tag{32}$$

Bemerkung

- Die Analyse von Erwartungswertschätzern ist ein wichtiger Anwendungsfall.
- Die Generalisierung der zentralen Grenzwertsätze sind wichtige Anwendungsfälle.

Mittelwerttransformation



Mittelwerttransformation

Beweis

Wir halten zunächst fest, dass mit dem Theorem zur Summe von unabhängig normalverteilten Zufallsvariablen gilt, dass $\bar{X}_n = \frac{1}{n} Y$ mit $Y := \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2$. Einsetzen in das univariate WDF Transformationstheorem für lineare Funktionen ergibt dann

$$
\begin{aligned}
p_{\bar{X}_n}(\bar{x}_n) &= \frac{1}{|1/n|} N\left(n\bar{x}_n; n\mu, n\sigma^2\right) \\
&= \frac{n}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2n\sigma^2}\left(n\bar{x}_n - n\mu\right)^2\right) \\
&= \frac{n}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2n\sigma^2}\left(n\bar{x}_n - n\mu\right)^2\right) \\
&= nn^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(n\bar{x}_n)^2}{2n\sigma^2} + \frac{2(n\bar{x}_n)(n\mu)}{2n\sigma^2} - \frac{(n\mu)^2}{2n\sigma^2}\right) \\
&= \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n\bar{x}_n^2}{2\sigma^2} + \frac{2n\bar{x}_n\mu}{2\sigma^2} - \frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \frac{1}{1/\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\bar{x}_n^2}{2(\sigma^2/n)} + \frac{2\bar{x}_n\mu}{2(\sigma^2/n)} - \frac{\mu^2}{2(\sigma^2/n)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2/n)}} \exp\left(-\frac{1}{2(\sigma^2/n)}(\bar{x}_n - \mu)^2\right) \\
&= N\left(\bar{x}_n; \mu, \sigma^2/n\right)
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Vorbemerkungen

Transformationstheoreme

Standardtransformationen

- Summentransformation
- Mittelwerttransformation
- **Z-Transformation**
- χ^2-Transformation
- T-Transformation
- F-Transformation

Selbstkontrollfragen

Definition (Z-Zufallsvariable)

Z sei eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathbb{R}$ und WDF

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, z \mapsto p(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right). \tag{34}$$

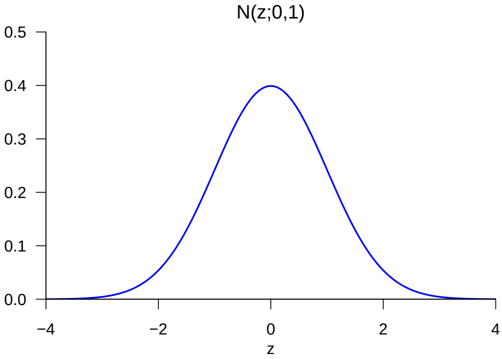
Dann sagen wir, dass Z einer *Z-Verteilung (oder Standardnormalverteilung)* unterliegt und nennen Z eine *Z-Zufallsvariable*. Wir kürzen dies mit $Z \sim N(0, 1)$ ab. Die WDF einer Z-Zufallsvariable bezeichnen wir mit

$$N(z; 0, 1) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right). \tag{35}$$

Bemerkung

- Eine Z-Zufallsvariable ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu := 0$ und $\sigma^2 := 1$.

Z-Transformation



Theorem (Z-Transformation)

Es sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ eine normalverteilte Zufallsvariable. Dann ist die Zufallsvariable

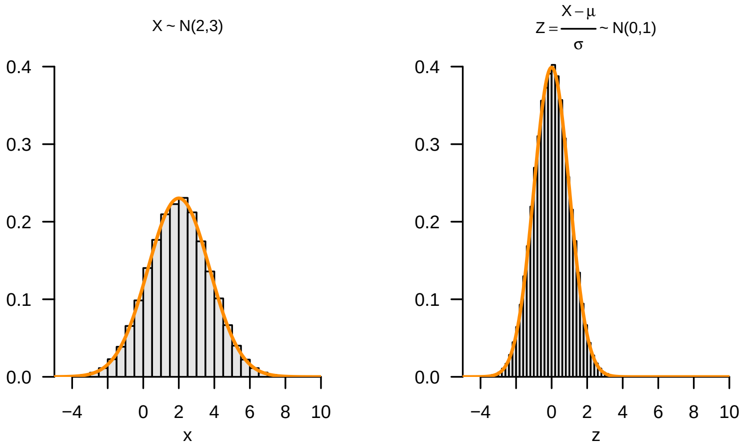
$$Z := \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{36}$$

eine Z-verteilte Zufallsvariable, es gilt also $Z \sim N(0, 1)$.

Bemerkungen

- Z wird hier als $(X - \mu)/\sigma$ definiert. Dass ein solches Z aber eine Z-Zufallsvariable ist, muss bewiesen werden und ergibt sich nicht einfach durch die Wahl des Bezeichners für $(X - \mu)/\sigma$, welcher hier zufällig auch Z lautet. In analoger Form gilt diese Bemerkung auch für alle weiteren betrachteten Transformationen.
- Die T-Statistik und T-Tests sind wichtige Anwendungsfälle.

Z-Transformation



Z-Transformation

Beweis

Wir nutzen das univariate WDF Transformationstheorem für linear-affine Funktionen. Dazu halten wir zunächst fest, dass die Z-Transformation einer Funktion der Form

$$\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \zeta(x) := \frac{x - \mu}{\sigma} =: z \tag{37}$$

entspricht. Wir stellen weiterhin fest, dass die Umkehrfunktion von ζ durch

$$\zeta^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, z \mapsto \zeta^{-1}(z) := \sigma z + \mu \tag{38}$$

gegeben ist, da für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $z = \frac{x-mu}{\sigma}$ gilt, dass

$$\zeta^{-1}(z) = \zeta^{-1}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{\sigma(x - \mu)}{\sigma} + \mu = x - \mu + \mu = x. \tag{39}$$

Schließlich stellen wir fest, dass für die Ableitung ζ' von ζ gilt, dass

$$\zeta'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}. \tag{40}$$

Beweis (fortgeführt)

Einsetzen in das univariate WDF Transformationstheorem für lineare Funktionen ergibt dann

$$
\begin{aligned}
p_Z(z) &= \frac{1}{|1/\sigma|} N\left(\sigma z + \mu; \mu, \sigma^2\right) \\
&= \frac{1}{1/\sqrt{\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sigma z + \mu - \mu\right)^2\right) \\
&= \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sigma^2 z^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) \\
&= N(z; 0, 1)
\end{aligned}
\tag{41}
$$

also, dass $Z \sim N(0, 1)$. Z ist also eine Z-Zufallsvariable.

Vorbemerkungen

Transformationstheoreme

Standardtransformationen

- Summentransformation
- Mittelwerttransformation
- Z-Transformation
- χ^2-**Transformation**
- T-Transformation
- F-Transformation

Selbstkontrollfragen

Definition (χ^2-Zufallsvariable)

U sei eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathbb{R}_{>0}$ und WDF

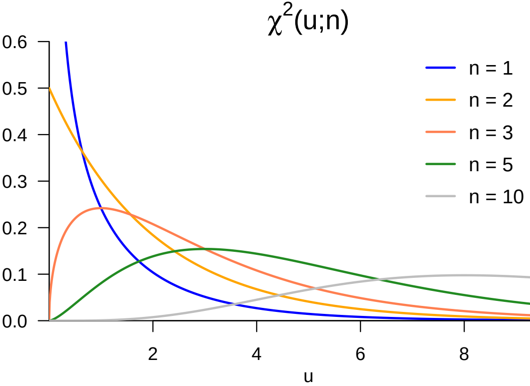
$$p : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, u \mapsto p(u) := \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} u^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}u\right), \tag{42}$$

wobei Γ die Gammafunktion bezeichne. Dann sagen wir, dass U einer χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden unterliegt und nennen U eine χ^2-Zufallsvariable mit n Freiheitsgraden. Wir kürzen dies mit $U \sim \chi^2(n)$ ab. Die WDF einer χ^2-Zufallsvariable bezeichnen wir mit

$$\chi^2(u; n) := \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} u^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}u\right). \tag{43}$$

Bemerkung

- Die WDF der χ^2-Verteilung entspricht der WDF $G\left(u; \frac{n}{2}, 2\right)$ einer Gammaverteilung.



Steigendes n verbreitert $\chi^2(u; n)$ und verschiebt Masse zur größeren Werten.

Theorem (χ^2-Transformation)

$Z_1, ..., Z_n \sim N(0,1)$ seien unabhängig und identisch verteilte Z-Zufallsvariablen. Dann ist die Zufallsvariable

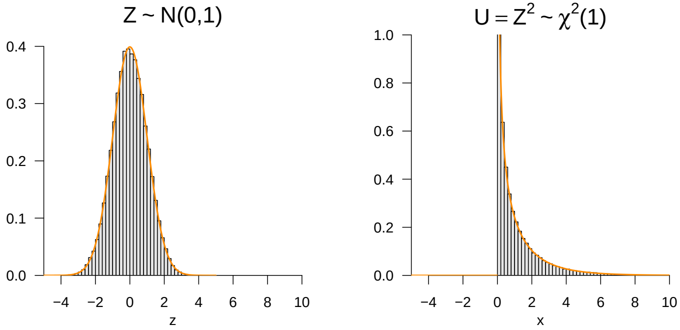
$$U := \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \tag{44}$$

eine χ^2-verteilte Zufallsvariable mit n Freiheitsgraden, es gilt also $U \sim \chi^2(n)$. Insbesondere gilt für $Z \sim N(0,1)$ und $U := Z^2$, dass $U \sim \chi^2(1)$.

Bemerkungen

- Die T-Statistik und T-Tests sind wichtige Anwendungsfälle.
- Die F-Statistik und Varianzanalysen sind wichtige Anwendungsfälle.

χ^2-Transformation



χ^2-Transformation

Beweis

Wir zeigen das Theorem nur für den Fall $n := 1$ mithilfe des WDF Transformationstheorems für stückweise bijektive Abbildungen. Danach ist die WDF einer Zufallsvariable $U := f(Z)$, welche aus der Transformation einer Zufallsvariable Z mit WDF p_Z durch eine stückweise bijektive Abbildung hervorgeht, gegeben durch

$$p_U(u) = \sum_{i=1}^{k} 1_{\mathcal{U}_i} \frac{1}{|f_i'(f_i^{-1}(u))|} p_Z \left(f_i^{-1}(u)\right). \tag{45}$$

Wir definieren

$$\mathcal{U}_1 :=] - \infty, 0[, \mathcal{U}_2 :=]0, \infty[, \text{ und } \mathcal{U}_i := \mathbb{R}_{>0} \text{ für } i = 1, 2, \tag{46}$$

sowie

$$f_i : \mathcal{Z}_i \to \mathcal{U}_i, x \mapsto f_i(z) := z^2 =: u \text{ für } i = 1, 2. \tag{47}$$

Die Ableitung und die Umkehrfunktion der f_i ergeben sich zu

$$f_i' : \mathcal{Z}_i \to \mathcal{Z}_i, x \mapsto f_i'(z) = 2z \text{ für } i = 1, 2, \tag{48}$$

und

$$f_1^{-1} : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_1, u \mapsto f_1^{-1}(u) = -\sqrt{u} \text{ und } f_2^{-1} : \mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}_2, u \mapsto f_2^{-1}(u) = \sqrt{u}, \tag{49}$$

respektive.

Beweis (fortgeführt)

Einsetzen in Gleichung (45) ergibt dann

$$
\begin{aligned}
p_U(u) &= 1_{\mathcal{U}_1}(u)\frac{1}{|f_1'(f_1^{-1}(u))|}p_Z\left(f_1^{-1}(u)\right) + 1_{\mathcal{U}_2}(u)\frac{1}{|f_2'(f_2^{-1}(u))|}p_Z\left(f_2^{-1}(u)\right) \\
&= \frac{1}{|2(-\sqrt{u})|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(-\sqrt{u})^2\right) + \frac{1}{|2(\sqrt{u})|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{u})^2\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}u\right) + \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}u\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{u}}\exp\left(-\frac{1}{2}u\right).
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Andererseits gilt, dass mit $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, die PDF einer χ^2-Zufallsvariable U mit $n = 1$ durch

$$
\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{\frac{1}{2}}}u^{\frac{1}{2}-1}\exp\left(-\frac{1}{2}u\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{u}}\exp\left(-\frac{1}{2}u\right)
\tag{51}
$$

gegeben ist. Also gilt, dass wenn $Z \sim N(0,1)$ ist, dann ist $U := Z^2 \sim \chi^2(1)$.

Vorbemerkungen

Transformationstheoreme

Standardtransformationen

- Summentransformation
- Mittelwerttransformation
- Z-Transformation
- χ^2-Transformation
- T-**Transformation**
- F-Transformation

Selbstkontrollfragen

Definition (t-Zufallsvariable)

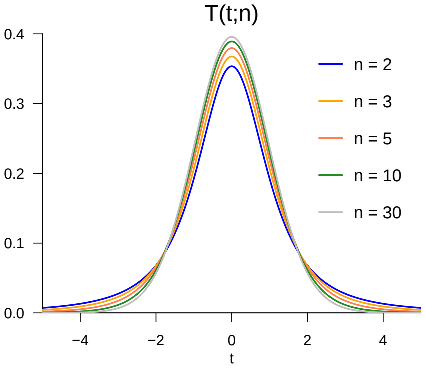
T sei eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathbb{R}$ und WDF

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, t \mapsto p(t) := \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \tag{52}$$

wobei Γ die Gammafunktion bezeichne. Dann sagen wir, dass T einer t-Verteilung mit n Freiheitsgraden unterliegt und nennen T eine t-Zufallsvariable mit n Freiheitsgraden. Wir kürzen dies mit $T \sim t(n)$ ab. Die WDF einer t-Zufallsvariable bezeichnen wir mit

$$T(t;n) := \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \tag{53}$$

T-Transformation



- Die Verteilung ist um 0 symmetrisch
- Steigendes n verschiebt Wahrscheinlichkeitsmasse aus den Ausläufen zum Zentrum.
- Ab $n = 30$ gilt $T(t; n) \approx N(0, 1)$.

Theorem (T-Transformation)

$Z \sim N(0,1)$ sei eine Z-Zufallfsvariable, $U \sim \chi^2(n)$ sei eine χ^2-Zufallsvariable mit n Freiheitsgraden, und Z und U seien unabhängige Zufallsvariablen. Dann ist die Zufallsvariable

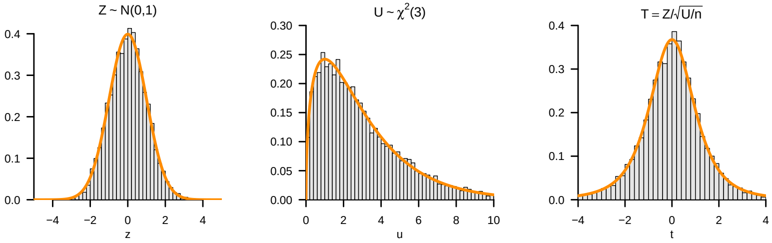
$$T := \frac{Z}{\sqrt{U/n}} \tag{54}$$

eine t-verteilte Zufallsvariable mit n Freiheitsgraden, es gilt also $T \sim t(n)$.

Bemerkungen

- Das Theorem geht auf Student (1908) zurück.
- Das Theorem ist das zentrale Resultat der Frequentistischen Statistik.
- Zabell (2008) gibt hierzu einen historischen Überblick.
- Die T-Statistik und T-Tests sind wichtige Anwendungsfälle.

T-Transformation



Beweis

Wir halten zunächst fest, dass die zweidimensionale WDF der gemeinsamen (unabhängigen) Verteilung von Z und U durch

$$p_{Z,U}(z,u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} u^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}u\right). \tag{55}$$

gegeben ist. Wir betrachten dann die multivariate vektorwertige Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (z,u) \mapsto f(z,u) := \left(\frac{z}{\sqrt{u/n}}, u\right) =: (t,w) \tag{56}$$

und benutzen das multivariate WDF Transformationstheorem für bijektive Abbildungen um die WDF von (t, w) herzuleiten. Dazu erinnern wir uns, dass wenn X ein n-dimensionaler Zufallsvektor mit WDF p_X und $Y := f(X)$ für eine differenzierbare und bijektive Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist, die WDF des Zufallsvektors Y durch

$$p_Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}, y \mapsto p_Y(y) := \frac{1}{|J^f\left(f^{-1}(y)\right)|} p_X\left(f^{-1}(y)\right) \tag{57}$$

gegeben ist. Für die im vorliegenden Fall betrachtete Abbildung halten wir zunächst fest, dass

$$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (t,w) \mapsto f^{-1}(t,w) := \left(\sqrt{w/n}t, w\right). \tag{58}$$

Beweis (fortgeführt)

Dies ergibt sich direkt aus

$$f^{-1}(f(z,u)) = f^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{u/n}}, u\right) = \left(\frac{\sqrt{u/n}z}{\sqrt{u/n}}, u\right) = (z,u) \text{ für alle } (z,u) \in \mathbb{R}^2. \tag{59}$$

Wir halten dann fest, dass die Determinante der Jacobi-Matrix von f an der Stelle (z,u) durch

$$|J^f(z,u)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{u/n}}\right) & \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{z}{\sqrt{u/n}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}u & \frac{\partial}{\partial u}u \end{vmatrix} = \left(\frac{v}{n}\right)^{-1/2}, \tag{60}$$

gegeben ist, sodass folgt, dass

$$\frac{1}{|J^f\left(f^{-1}(z,u)\right)|} = \left(\frac{w}{n}\right)^{1/2}. \tag{61}$$

Einsetzen in Gleichung (57) ergibt dann

$$p_{T,W}(t,w) = \left(\frac{w}{n}\right)^{1/2} p_{Z,V}\left(\sqrt{w/n}t, w\right), \tag{62}$$

T-Transformation

Beweis (fortgeführt)

Es folgt also

$$
\begin{aligned}
p_T(t) &= \int_0^\infty p_{T,W}(t,w)\,dw \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{w}{n}\right)^{1/2} p_{Z,V}\left(\sqrt{w/n}t, w\right)\,dw \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{w/n}t)^2\right) \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} w^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}w\right) \left(\frac{w}{n}\right)^{1/2}\,dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{w}{n}t^2\right) w^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}w\right) w^{1/2}\,dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{w}{n}t^2 - \frac{1}{2}w\right) w^{\frac{n}{2}-1} w^{\frac{1}{2}}\,dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{w}{n}t^2 + w\right)\right) w^{\frac{n+1}{2}-1}\,dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)\right) w^{\frac{n+1}{2}-1}\,dw
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Beweis (fortgeführt)

Wir stellen dann fest, dass der Integrand auf der linken Seite der obigen Gleichung dem Kern einer Gamma WDF mit Parametern $\alpha = \frac{n+1}{2}$ und $\beta = \frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}$ entspricht, wie man leicht einsieht:

$$
\Gamma(w;\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} w^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{w}{\beta}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \Gamma\left(w; \frac{n+1}{2}, \frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}\right) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{n+1}{2})\left(\frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}\right)^{\frac{n+1}{2}}} w^{\frac{n+1}{2}-1} \exp\left(-\frac{w}{\frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}}\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{n+1}{2})\left(\frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)\right) w^{\frac{n+1}{2}-1}.
\end{aligned}
$$

T-Transformation

Beweis (fortgeführt)

Es ergibt sich also

$$p_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}\,n^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \Gamma\left(w; \frac{n+1}{2}, \frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}\right) dw. \tag{64}$$

Schließlich stellen wir fest, dass der Integralterm in obiger Gleichung dem Normalisierungsterm einer Gamma WDF entspricht. Abschließend ergibt sich also

$$p_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}\,n^{\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \left(\frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}\right)^{\frac{n+1}{2}}. \tag{65}$$

Die Verteilung von $Z/\sqrt{U/n}$ hat also die WDF einer T-Zufallsvariable.

□

Vorbemerkungen

Transformationstheoreme

Standardtransformationen

- Summentransformation
- Mittelwerttransformation
- Z-Transformation
- χ^2-Transformation
- T-Transformation
- F-**Transformation**

Selbstkontrollfragen

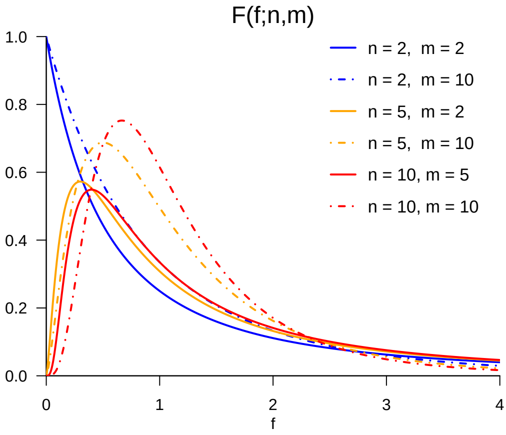
Definition (f-Zufallsvariable)

F sei eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathbb{R}_{>0}$ und WDF

$$p_F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, f \mapsto p_F(f) := m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{f^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1 + \frac{m}{n} f\right)^{\frac{m+n}{2}}}, \tag{66}$$

wobei Γ die Gammafunktion bezeichne. Dann sagen wir, dass F einer f-Verteilung mit n, m Freiheitsgraden unterliegt und nennen F eine f-Zufallsvariable mit n, m Freiheitsgraden. Wir kürzen dies mit $F \sim f(n, m)$ ab. Die WDF einer f-Zufallsvariable bezeichnen wir mit

$$F(f; n, m) := m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{f^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1 + \frac{m}{n} f\right)^{\frac{m+n}{2}}}. \tag{67}$$


F(f;n,m)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
1
2
3
4
f
n = 2, m = 2
n = 2, m = 10
n = 5, m = 2
n = 5, m = 10
n = 10, m = 5
n = 10, m = 10

F-Transformation

Theorem (F-Transformation)

$V \sim \chi^2(n)$ und $W \sim \chi^2(m)$ seien zwei unabhängige χ^2-Zufallfsvariablen mit n und m Freiheitsgraden, respektive. Dann ist die Zufallsvariable

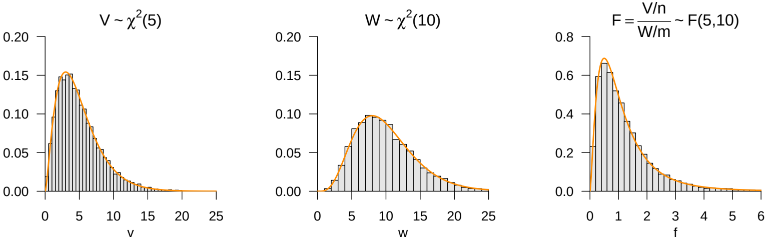
$$F := \frac{V/n}{W/m} \tag{68}$$

eine f-verteilte Zufallsvariable mit n, m Freiheitsgraden, es gilt also $F \sim f(n, m)$.

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis
- Das Theorem kann bewiesen werden, in dem man zunächst ein Transformationstheorem für Quotienten von Zufallsvariablen mithilfe des multivariaten Transformationstheorems und Marginalisierung herleitet und dieses Theorem dann auf die WDF von χ^2-verteilten ZVen anwendet. Dabei ist die Regel zur Integration durch Substitution von zentraler Bedeutung.

F-Transformation



Vorbemerkungen

Transformationstheoreme

Standardtransformationen

- Summentransformation
- Mittelwerttransformation
- Z-Transformation
- χ^2-Transformation
- T-Transformation
- F-Transformation

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie den Begriff der Transformation einer Zufallsvariable.
2. Erläutern Sie die zentrale Idee der Transformationstheoreme.
3. Erläutern Sie die Bedeutung der Standardtransformationen für die Statistik.
4. Geben Sie das Summentransformationstheorem wieder.
5. Geben Sie das Mittelwerttransformationstheorem wieder.
6. Geben Sie das Z-Transformationstheorem wieder.
7. Geben Sie das χ^2-Transformationstheorem wieder.
8. Beschreiben Sie die WDF der t-Verteilung in Abhängigkeit ihrer Freiheitsgrade.
9. Geben Sie das T-Transformationstheorem wieder.
10. Geben Sie das F-Transformationstheorem wieder.

References

Student. 1908. "The Probable Error of a Mean." *Biometrika* 6 (1): 1–25.

Zabell, S. L. 2008. "On Student's 1908 Article 'The Probable Error of a Mean'." *Journal of the American Statistical Association* 103 (481): 1–7. https://doi.org/10.1198/016214508000000030.