Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2021/22

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(6) Erwartungswert, Varianz, Kovarianz

Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

Datum	Einheit	Thema
14.10.2021	Einführung	(1) Einführung
21.10.2021	Wahrscheinlichkeitstheorie	(2) Wahrscheinlichkeitsräume
28.10.2021	Wahrscheinlichkeitstheorie	(3) Elementare Wahrscheinlichkeiten
04.11.2021	Wahrscheinlichkeitstheorie	(4) Zufallsvariablen
11.11.2021	Wahrscheinlichkeitstheorie	(5) Multivariate Verteilungen
18.11.2021	**Wahrscheinlichkeitstheorie**	**(6) Erwartungswert, Varianz, Kovarianz**
25.11.2021	Wahrscheinlichkeitstheorie	(7) Ungleichungen und Grenzwerte
02.12.2021	Wahrscheinlichkeitstheorie	(8) Normalverteilungstransformationen
09.12.2021	Frequentistische Inferenz	(9) Modelle, Statistiken und Schätzer
16.12.2021	Frequentistische Inferenz	(10) Schätzereigenschaften
	Weihnachtspause	
06.01.2022	Frequentistische Inferenz	(11) Konfidenzintervalle
13.01.2022	Frequentistische Inferenz	(12) Hypothesentests
20.01.2022	Frequentistische Inferenz	(13) Einstichproben-T-Tests
27.01.2022	Frequentistische Inferenz	(14) Zweistichproben-T-Tests
31.01.2022	Klausur	16 - 17 Uhr, G44 - H6
Jul 2022	Klausurwiederholungstermin	

Repräsentation zentraler Eigenschaften

Modellierung

Modell

Wahrscheinlichkeitstheorie

Probabilistisches Modell

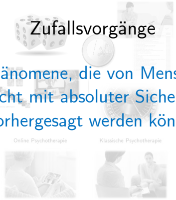
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), X : \Omega \to \mathbb{R}$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

$\mathbb{P}_X(S) = \mathbb{P}(X^{-1}(S))$

Realität

Zufallsvorgänge



Phänomene, die von Menschen nicht mit absoluter Sicherheit vorhergesagt werden können.

Vorhersagen

Quantifizierung von Unsicherheit

Wir nehmen an, dass die BDI Scores der Proband:innen Realisierungen **unabhängiger und identisch** normalverteilter Zufallsvariablen sind.

Modellierung

Modell

Wahrscheinlichkeitstheorie

$$X_{1j} \sim N(\mu_1, \sigma^2), j = 1, \dots, n_1$$

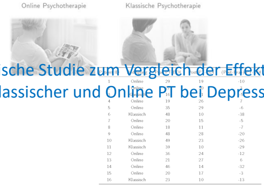
$$X_{2j} \sim N(\mu_2, \sigma^2), j = 1, \dots, n_2$$

$$\mathbb{E}(X_{ij}) = \mu_i \quad \mathbb{V}(X_{ij}) = \sigma^2 \ \forall i, j$$

$$\mathbb{C}(X_{ij}, X_{kl}) = 0 \ \forall i \neq k, j \neq l$$

Realität

Zufallsvorgang



Klinische Studie zum Vergleich der Effekte von Klassischer und Online PT bei Depression

Vorhersagen

Erwartungswert

Varianz und Standardabweichung

Stichprobenmittel, Stichprobenvarianz, Stichprobenstandardabweichung

Kovarianz und Korrelation

Stichprobenkovarianz und Stichprobenkorrelation

Selbstkontrollfragen

Erwartungswert

Varianz und Standardabweichung

Stichprobenmittel, Stichprobenvarianz, Stichprobenstandardabweichung

Kovarianz und Korrelation

Stichprobenkovarianz und Stichprobenkorrelation

Selbstkontrollfragen

Definition (Erwartungswert)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X sei eine Zufallsvariable. Dann ist der *Erwartungswert von* X definiert als

- $\mathbb{E}(X) := \sum_{x \in \mathcal{X}} x\, p_X(x)$, wenn $X : \Omega \to \mathcal{X}$ diskret mit WMF p_X ist, und als
- $\mathbb{E}(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x\, p_X(x)\, dx$, wenn $X : \Omega \to \mathbb{R}$ kontinuierlich mit WDF p_X ist.

Der Erwartungswert einer Zufallsvariable heißt *existent*, wenn er endlich ist.

Bemerkungen

- Der Erwartungswert ist eine skalare Zusammenfassung einer Verteilung.
- Intuitiv ist $\mathbb{E}(X) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ für eine große Zahl n von Kopien X_i von X.

Beispiel (Erwartungswert einer Bernoulli Zufallsvariable)

Es sei $X \sim \text{Bern}(\mu)$. Dann gilt $\mathbb{E}(X) = \mu$.

<u>Beweis</u>

X ist diskret mit $\mathcal{X} = \{0, 1\}$. Also gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in \{0,1\}} x \, \text{Bern}(x; \mu) \\
&= 0 \cdot \mu^0 (1-\mu)^{1-0} + 1 \cdot \mu^1 (1-\mu)^{1-1} \\
&= 1 \cdot \mu^1 (1-\mu)^0 \\
&= \mu.
\end{aligned} \tag{1}
$$

$\square$

Beispiel (Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariable)

Es sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt $\mathbb{E}(X) = \mu$.

Beweis

Wir halten zunächst ohne Beweis fest, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}. \tag{2}$$

Mit der Definition des Erwartungswerts für kontinuierliche Zufallsvariablen gilt

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)\, dx. \tag{3}$$

Mit der Substitutionsregel

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx = \int_{a}^{b} f(g(x))g'(x)\, dx \tag{4}$$

und der Definition von

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) := \sqrt{2\sigma^2}x + \mu \text{ with } g'(x) = \sqrt{2\sigma^2}, \tag{5}$$

gilt dann

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2\sigma^2}x + \mu) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(\sqrt{2\sigma^2}x + \mu\right) - \mu\right)^2\right) \sqrt{2\sigma^2}\, dx \\
&= \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2\sigma^2}x + \mu) \exp\left(-x^2\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-x^2\right) dx + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-x^2\right) dx + \mu\sqrt{\pi}\right)
\end{aligned} \tag{6}
$$

Eine Stammfunktion von $x \exp\left(-x^2\right)$ ist $-\frac{1}{2}\exp(-x^2)$. Mit

$$
\lim_{x\to-\infty} \exp(-x^2) = 0 \text{ und } \lim_{x\to\infty} \exp(-x^2) = 0 \tag{7}
$$

verschwindet der Integralterm und wir erhalten

$$
\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\mu\sqrt{\pi}\right) = \mu. \tag{8}
$$

□

Theorem (Eigenschaften des Erwartungswerts)

(1) (Linear-affine Transformation) Für eine Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b. \tag{9}$$

(2) (Linearkombination) Für Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ und $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}(X_i). \tag{10}$$

(3) (Faktorisierung bei Unabhängigkeit) Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ gilt

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i). \tag{11}$$

Bemerkung

- Die genannten Eigenschaften sind oft nützlich zur Berechnung von Erwartungswerten.

Beweis

Eigenschaft (1) folgt aus den Linearitätseigenschaften von Summen und Integralen. Wir betrachten nur den Fall einer kontinuierlichen Zufallsvariable X mit WDF p_X genauer. In diesem Fall gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(aX + b) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)p_X(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} axp_X(x) + bp_X(x)\,dx \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,dx \\
&= a\mathbb{E}(X) + b.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Beweis (fortgeführt)

Eigenschaft (2) folgt gleichfalls aus den Linearitätseigenschaften von Summen und Integralen. Wir betrachten nur den Fall von zwei kontinuierlichen Zufallsvariablen X_1 und X_2 mit bivariater WDF p_{X_1,X_2} genauer. In diesem Fall gilt

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{2} a_i X_i\right) \\
&= \mathbb{E}(a_1 X_1 + a_2 X_2) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} (a_1 x_1 + a_2 x_2) p_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} a_1 x_1 p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) + a_2 x_2 p_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \\
&= a_1 \iint_{\mathbb{R}^2} x_1 p_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 + a_2 \iint_{\mathbb{R}^2} x_2 p_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Erwartungswert

Beweis (fortgeführt)

$$
\begin{aligned}
&= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,dx_2 \right) dx_1 + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,dx_1 \right) dx_2 \\
&= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_{X_1}(x_1)\,dx_1 + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} x_2 p_{X_2}(x_2)\,dx_2 \\
&= a_1 \mathbb{E}(X_1) + a_2 \mathbb{E}(X_2) \\
&= \sum_{i=1}^{2} a_i \mathbb{E}(X_i).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Ein Induktionsargument erlaubt dann die Generalisierung vom bivariaten zum n-variaten Fall.

Beweis (fortgeführt)

Zu Eigenschaft (3) betrachten wir den Fall von n kontinuierlichen Zufallsvariablen mit gemeinsamer WDF $p_{X_1,...,X_n}$. Weil als $X_1, ..., X_n$ unabhängig vorausgesetzt sind, gilt

$$p_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i). \tag{15}$$

Weiterhin gilt also

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) p_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)\, dx_1 ... dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i)\, dx_1 ... dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} x_i p_{X_i}(x_i)\, dx_1 ... dx_n \\
&= \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} x_i p_{X_i}(x_i)\, dx_i = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i).
\end{aligned} \tag{16}$$

□

Erwartungswert

Varianz und Standardabweichung

Stichprobenmittel, Stichprobenvarianz, Stichprobenstandardabweichung

Kovarianz und Korrelation

Stichprobenkovarianz und Stichprobenkorrelation

Selbstkontrollfragen

Definition (Varianz und Standardabweichung)

Es sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$. Die *Varianz von* X ist definiert als

$$\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right), \tag{17}$$

unter der Annahme, dass dieser Erwartungswert existiert. Die *Standardabweichung von* X ist definiert

$$\mathbb{S}(X) := \sqrt{\mathbb{V}(X)}. \tag{18}$$

Bemerkungen

- Die Varianz misst die Streuung (Breite) einer Verteilung.
- Quadration ist nötig wegen $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$.
- Ein alternatives Maß für die Streuung einer Verteilung ist $\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|)$.
- Ein weiteres Maß für die Streuung einer Verteilung ist die Entropie $-\mathbb{E}(\ln p_X(X))$.

Beispiel (Varianz einer Bernoulli Zufallsvariable)

Es sei $X \sim \text{Bern}(\mu)$. Dann ist die Varianz von X gegeben durch

$$\mathbb{V}(X) = \mu(1-\mu). \tag{19}$$

<u>Beweis</u>

X ist eine diskrete Zufallsvariable und es gilt $\mathbb{E}(X) = \mu$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right) \\
&= \sum_{x \in \{0,1\}} (x-\mu)^2 \text{Bern}(x;\mu) \\
&= (0-\mu)^2 \mu^0 (1-\mu)^{1-0} + (1-\mu)^2 \mu^1 (1-\mu)^{1-1} \\
&= \mu^2 (1-\mu) + (1-\mu)^2 \mu \\
&= \left(\mu^2 + (1-\mu)\mu\right)(1-\mu) \\
&= \left(\mu^2 + \mu - \mu^2\right)(1-\mu) \\
&= \mu(1-\mu).
\end{aligned} \tag{20}$$

□

Theorem (Varianzverschiebungssatz)

Es sei X eine Zufallsvariable. Dann gilt

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2. \tag{21}$$

Beweis

Mit der Definition der Varianz und der Linearität des Erwartungswerts gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\right) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X)^2\right) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.
\end{aligned} \tag{22}$$

□

Bemerkung

- Das Theorem ist nützlich, wenn $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ und $\mathbb{E}(X)$ leicht zu berechnen sind.

Beispiel (Varianz einer normalverteilten Zufallsvariable)

Es sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$.

Beweis

Wir halten zunächst fest, dass mit dem Varianzverschiebungssatz gilt, dass

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right) dx - \mu^2 \tag{23}$$

Mit der Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx \tag{24}$$

und der Definition von

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{2\sigma^2}x + \mu,\, g(-\infty) := -\infty,\, g(\infty) := \infty, \text{ with } g'(x) = \sqrt{2\sigma^2}, \tag{25}$$

kann das Integral auf der rechten Seite von Gleichung (23) dann als

Beweis (fortgeführt)

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2\sigma^2}x+\mu)^2 \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}((\sqrt{2\sigma^2}x+\mu)-\mu)^2\right)\sqrt{2\sigma^2}\,dx \\
&= \sqrt{2\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2\sigma^2}x+\mu)^2 \exp\left(-\frac{2\sigma^2x^2}{2\sigma^2}\right)\,dx \\
&= \sqrt{2\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2\sigma^2}x+\mu)^2 \exp\left(-x^2\right)\,dx.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

geschrieben werden. Also gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2\sigma^2}x+\mu)^2 \exp\left(-x^2\right)\,dx - \mu^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2\sigma^2}x)^2 + 2\sqrt{2\sigma^2}x\mu + \mu^2)\exp\left(-x^2\right)\,dx - \mu^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(2\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp\left(-x^2\right)\,dx + 2\sqrt{2\sigma^2}\mu\int_{-\infty}^{\infty} x\exp\left(-x^2\right)\,dx + \mu^2\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-x^2\right)\,dx\right) - \mu
\end{aligned}
$$

Beweis (fortgeführt)

Wir halten weiterhin ohne Beweis fest, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-x^2)\, dx = 0 \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}. \tag{27}$$

Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(2\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-x^2\right)\, dx + \mu^2 \sqrt{\pi} \right) - \mu^2 \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-x^2\right)\, dx + \mu^2 - \mu^2 \qquad (28)\\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-x^2\right)\, dx
\end{aligned}$$

Mit der partiellen Integrationsregel

$$\int_a^b f'(x) g(x)\, dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x)\, dx \tag{29}$$

und der Definition von

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \exp(-x^2) \text{ with } f'(x) = -2\exp(-x^2) \tag{30}$$

Beweis (fortgeführt)

und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) := -\frac{1}{2}x \text{ with } g'(x) = -\frac{1}{2}, \tag{31}$$

so dass

$$f'(x)g(x) = -2\exp(-x^2)\left(-\frac{1}{2}x\right) = x^2\exp(-x^2), \tag{32}$$

gilt, ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-x^2\right)\,dx \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{2}x\exp(-x^2)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\,dx\right) \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{2}x\exp(-x^2)|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right)\,dx\right),
\end{aligned} \tag{33}$$

Aus $\lim_{x\to\pm\infty}\exp(-x^2) = 0$ schließen wir, dass der erste Term in den Klammern auf der rechten Seite der obigen Gleichung gleich 0 ist. Schließlich ergibt sich

$$\mathbb{V}(X) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-x^2\right)\,dx\right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = \sigma^2. \tag{34}$$

□

Theorem (Eigenschaften der Varianz)

(1) (Linear-affine Transformation) Für eine Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gelten

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X) \text{ und } \mathbb{S}(aY + b) = |a|\mathbb{S}(X). \tag{35}$$

(2) (Linearkombination bei Unabhängigkeit) Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ und $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbb{V}(X_i). \tag{36}$$

Beweis

Um Eigenschaft (1) zu zeigen, definieren wir zunächst $Y := aX + b$ und halten fest, dass $\mathbb{E}(Y) = a\mathbb{E}(X) + b$. Für die Varianz von Y ergibt sich dann

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}\left((Y - \mathbb{E}(Y))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((aX + b - a\mathbb{E}(X) - b)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((aX - a\mathbb{E}(X))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((a(X - \mathbb{E}(X))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(a^2(X - \mathbb{E}(X))^2\right) \\
&= a^2\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) \\
&= a^2\mathbb{V}(X)
\end{aligned} \tag{37}
$$

Wurzelziehen ergibt dann das Resultat für die Standardabweichung.

Für Eigenschaft (2) betrachten wir den Fall zweier unabhängiger Zufallsvariablen X_1 und X_2 genauer. Wir halten zunächst fest, dass in diesem Fall gilt, dass

$$
\mathbb{E}(a_1X_1 + a_2X_2) = a_1\mathbb{E}(X_1) + a_2\mathbb{E}(X_2). \tag{38}
$$

Beweis (fortgeführt)

Es ergibt sich also

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{2} a_i X_i\right) \\
&= \mathbb{V}(a_1 X_1 + a_2 X_2) \\
&= \mathbb{E}\left((a_1 X_1 + a_2 X_2 - \mathbb{E}\,(a_1 X_1 + a_2 X_2))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((a_1 X_1 + a_2 X_2 - a_1 \mathbb{E}(X_1) - a_2 \mathbb{E}(X_2))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((a_1 X_1 - a_1 \mathbb{E}(X_1) + a_2 X_2 - a_2 \mathbb{E}(X_2))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(((a_1(X_1 - \mathbb{E}(X_1)) + (a_2(X_2 - \mathbb{E}(X_2)))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((a_1(X_1 - \mathbb{E}(X_1)))^2 - 2(a_1(X_1 - \mathbb{E}(X_1))(a_2(X_2 - \mathbb{E}(X_2)) + (a_2(X_2 - \mathbb{E}(X_2)))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((a_1^2(X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2 - 2a_1 a_2 (X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2)) + a_2^2(X_2 - \mathbb{E}(X_2))^2\right) \\
&= a_1^2 \mathbb{E}\left((X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2\right) - 2a_1 a_2 \mathbb{E}\left((X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))\right) + a_2^2 \mathbb{E}\left((X_2 - \mathbb{E}(X_2))^2\right) \\
&= a_1^2 \mathbb{V}(X_1) - 2a_1 a_2 \mathbb{E}\left((X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))\right) + a_2^2 \mathbb{V}(X_2) \\
&= \sum_{i=1}^{2} a_i^2 \mathbb{V}(X_i) - 2a_1 a_2 \mathbb{E}\left((X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))\right)
\end{aligned}
$$

.

Beweis (fortgeführt)

Weil X_1 und X_2 unabhängig sind, ergibt sich mit den Eigenschaften des Erwartungswerts für unabhängige Zufallsvariablen, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))\right) &= \mathbb{E}\left((X_1 - \mathbb{E}(X_1))\right)\mathbb{E}\left((X_2 - \mathbb{E}(X_2))\right) \\ &= (\mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_1))(\mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(X_2)) \\ &= 0\end{aligned} \tag{39}$$

ist. Damit folgt also

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{2} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{2} a_i^2 \mathbb{V}(X_i). \tag{40}$$

Ein Induktionsargument erlaubt dann die Generalisierung vom bivariaten zum n-variaten Fall.

□

Erwartungswert

Varianz und Standardabweichung

Stichprobenmittel, Stichprobenvarianz, Stichprobenstandardabweichung

Kovarianz und Korrelation

Stichprobenkovarianz und Stichprobenkorrelation

Selbstkontrollfragen

Stichprobenmittel, Stichprobenvarianz, Stichprobenstandardabweichung

Definition (Stichprobenmittel, -varianz, -standardabweichung)

$X_1, ..., X_n$ seien Zufallsvariablen. Dann nennt man $X_1, ..., X_n$ auch eine *Stichprobe*.

- Das *Stichprobenmittel* von $X_1, ..., X_n$ ist definiert als der arithmetische Mittelwert

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{41}$$

- Die *Stichprobenvarianz* von $X_1, ..., X_n$ ist definiert als

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2. \tag{42}$$

- Die *Stichprobenstandardabweichung* ist definiert als

$$S_n := \sqrt{S_n^2}. \tag{43}$$

Bemerkungen

- $\mathbb{E}(X), \mathbb{V}(X)$, und $\mathbb{S}(X)$ sind Kennzahlen einer Zufallsvariable X.
- $\bar{X}_n, S_n^2$, und S_n sind Kennzahlen einer Stichprobe $X_1, ..., X_n$.
- $\bar{X}_n, S_n^2$, und S_n sind Zufallsvariablen, ihre Realisationen werden mit $\bar{x}_n, s_n^2$, und s_n bezeichnet.

Beispiel (Stichprobenmittel, Stichprobenvarianz, Stichprobenstandardabweichung)

- Es seien $X_1, ..., X_{10} \sim N(1,2)$.
- Wir nehmen die folgenden Realisationen an

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0.54	1.01	-3.28	0.35	2.75	-0.51	2.32	1.49	0.96	1.25

- Die Stichprobenmittelrealisation ist

$$\bar{x}_{10} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{6.88}{10} = 0.68. \tag{44}$$

- Die Stichprobenvarianzrealisation ist

$$s_{10}^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x}_{10})^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 0.68)^2 = \frac{25.37}{9} = 2.82. \tag{45}$$

- Die Stichprobenstandardabweichungrealisation ist

$$s_{10} = \sqrt{s_{10}^2} = \sqrt{2.82} = 1.68. \tag{46}$$

Erwartungswert

Varianz und Standardabweichung

Stichprobenmittel, Stichprobenvarianz, Stichprobenstandardabweichung

Kovarianz und Korrelation

Stichprobenkovarianz und Stichprobenkorrelation

Selbstkontrollfragen

Definition (Kovarianz und Korrelation)

Die *Kovarianz* zweier Zufallsvariablen X und Y ist definiert als

$$\mathbb{C}(X,Y) := \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right). \tag{47}$$

Die *Korrelation* zweier Zufallsvariablen X und Y ist definiert als

$$\rho(X,Y) := \frac{\mathbb{C}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}\sqrt{\mathbb{V}(Y)}} = \frac{\mathbb{C}(X,Y)}{\mathbb{S}(X)\mathbb{S}(Y)}. \tag{48}$$

Bemerkungen

- Die Kovarianz von X mit sich selbst ist die Varianz von X,

$$\mathbb{C}(X,X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{V}(X). \tag{49}$$

- $\rho(X,Y)$ wird auch *Korrelationskoeffizient* von X und Y genannt.
- Wenn $\rho(X,Y) = 0$ ist, werden X und Y *unkorreliert* genannt.
- Wir zeigen später mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung, dass $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$.

Beispiel (Kovarianz und Korrelation zweier diskreter Zufallsvariablen)

Es sei $X := (X_1, X_2)$ ein Zufallsvektor mit WMF p_{X_1,X_2} definiert durch (Lange and Mosler (2017))

$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$p_{X_1}(x_1)$
$x_1 = 1$	0.10	0.05	0.15	0.30
$x_1 = 2$	0.60	0.05	0.05	0.70
$p_{X_2}(x_2)$	0.70	0.10	0.20	

X_1, X_2 sind also zwei Zufallsvariablen mit einer definierten bivariaten Verteilung. Um $\mathbb{C}(X_1, X_2)$ und $\rho(X_1, X_2)$ zu berechnen, halten wir zunächst fest, dass

$$\mathbb{E}(X_1) = \sum_{x_1=1}^{2} x_1 p_{X_1}(x_1) = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.7 = 1.7 \tag{50}$$

und

$$\mathbb{E}(X_2) = \sum_{x_2=1}^{3} x_2 p_{X_2}(x_2) = 1 \cdot 0.7 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.2 = 1.5. \tag{51}$$

Mit der Definition der Kovarianz von X_1 und X_2, gilt dann

Kovarianz und Korrelation

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{C}(X_1, X_2) \\
&= \mathbb{E}((X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))) \\
&= \sum_{x_1=1}^{2}\sum_{x_2=1}^{3}(x_1 - \mathbb{E}(X_1))(x_2 - \mathbb{E}(X_2))p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \\
&= \sum_{x_1=1}^{2}\sum_{x_2=1}^{3}(x_1 - 1.7)(x_2 - 1.5)p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \\
&= \sum_{x_1=1}^{2}(x_1 - 1.7)(1 - 1.5)p_{X_1,X_2}(x_1, 1) \\
&\qquad + (x_1 - 1.7)(2 - 1.5)p_{X_1,X_2}(x_1, 2) \\
&\qquad + (x_1 - 1.7)(3 - 1.5)p_{X_1,X_2}(x_1, 3) \\
&= \quad (1 - 1.7)(1 - 1.5)p_{X_1,X_2}(1, 1) + (1 - 1.7)(2 - 1.5)p_{X_1,X_2}(1, 2) + (1 - 1.7)(3 - 1.5)p_{X_1,X_2}(1, 3) \\
&\quad + (2 - 1.7)(1 - 1.5)p_{X_1,X_2}(2, 1) + (2 - 1.7)(2 - 1.5)p_{X_1,X_2}(2, 2) + (2 - 1.7)(3 - 1.5)p_{X_1,X_2}(2, 3) \\
&= \quad (-0.7) \cdot (-0.5) \cdot 0.10 \qquad + (-0.7) \cdot 0.5 \cdot 0.05 \qquad + (-0.7) \cdot 1.5 \cdot 0.15 \\
&\quad + 0.3 \cdot (-0.5) \cdot 0.60 \qquad + 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.05 \qquad + 0.3 \cdot 1.5 \cdot 0.05 \\
&= 0.035 - 0.0175 - 0.1575 - 0.09 + 0.0075 + 0.0225 \\
&= -0.2.
\end{aligned}
$$

Theorem (Kovarianzverschiebungssatz)

X und Y seien Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\mathbb{C}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y). \tag{52}$$

Beweis

Mit der Definition der Kovarianz gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}(X,Y) &= \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right) \\
&= \mathbb{E}\left(XY - X\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)Y + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right) \\
&= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).
\end{aligned} \tag{53}$$

□

Bemerkungen

- Das Theorem ist nützlich, wenn $\mathbb{E}(XY), \mathbb{E}(X)$, und $\mathbb{E}(Y)$ leicht zu berechnen sind.
- Für $Y = X$ erhalten wir $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Theorem (Korrelation und Unabhängigkeit)

X und Y seien zwei Zufallsvariablen. Wenn X und Y unabhängig sind, dann ist $\mathbb{C}(X,Y) = 0$ und X und Y sind unkorreliert. Ist dagegen $\mathbb{C}(X,Y) = 0$ und sind X und Y somit unkorreliert, dann sind X und Y nicht notwendigerweise unabhängig.

Beweis

Wir zeigen zunächst, dass aus der Unabhängigkeit von X und Y $\mathbb{C}(X,Y) = 0$ folgt. Hierzu halten wir zunächst fest, dass für unabhängige Zufallsvariablen gilt, dass

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y). \tag{54}$$

Mit dem Kovarianzverschiebungssatz folgt dann

$$\mathbb{C}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0. \tag{55}$$

Mit der Definition des Korrelationskoeffizienten folgt dann unmittelbar, dass $\rho(X,Y) = 0$ und X und Y somit unkorreliert sind.

Beweis (fortgeführt)

Wir zeigen nun durch Angabe eines Beispiels, dass die Kovarianz von abhängigen Zufallsvariablen X und Y null sein kann.

Zu diesem Zweck betrachten wir den Fall zweier diskreter Zufallsvariablen X und Y mit Ergebnisräumen $\mathcal{X} = \{-1, 0, 1\}$ und $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$, marginaler WMF von X gegeben durch $p_X(X = x) = 1/3$ für $x \in \mathcal{X}$ und der Definition $Y := X^2$.

Wir halten dann zunächst fest, dass

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} x p_X(X = x) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0 \tag{56}$$

und

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(XX^2) = \mathbb{E}(X^3) = \sum_{x \in \mathcal{X}} x^3 p_X(X = x) = -1^3 \cdot \frac{1}{3} + 0^3 \cdot \frac{1}{3} + 1^3 \cdot \frac{1}{3} = 0. \tag{57}$$

Mit dem Kovarianzverschiebungssatz ergibt sich dann

$$\mathbb{C}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^3) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0 - 0 \cdot \mathbb{E}(Y) = 0. \tag{58}$$

Die Kovarianz von X und Y ist also null. Wie unten gezeigt faktorisiert die gemeinsame WMF von X und Y jedoch nicht, und somit sind X und Y nicht unabhängig.

Beweis (fortgeführt)

Die Definition of $Y := X^2$ impliziert die folgende bedingte WMF

$p_{Y\vert X}(y\vert x)$	$x=-1$	$x=0$	$x=1$
$y=0$	0	1	0
$y=1$	1	0	1

Die marginale WMF p_X und die bedingte WMF $p_{Y|X}$ implizieren die gemeinsame WMF

$p_{X,Y}(x,y)$	$x=-1$	$x=0$	$x=1$	$p_Y(y)$
$y=0$	0	1/3	0	1/3
$y=1$	1/3	0	1/3	2/3
$p_X(x)$	1/3	1/3	1/3	

Es gilt also zum Beispiel

$$p_{X,Y}(x=-1,y=0)=0\neq\frac{1}{9}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=p_X(x=-1)p_Y(y=0) \tag{59}$$

und damit sind X und Y nicht unabhängig.

$\square$

Theorem (Varianzen von Summen und Differenzen von Zufallsvariablen)

X und Y seien zwei Zufallsvariablen und es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\mathbb{V}(aX + bY + c) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y) + 2ab\mathbb{C}(X, Y). \tag{60}$$

Speziell gelten

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{C}(X, Y) \tag{61}$$

und

$$\mathbb{V}(X - Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) - 2\mathbb{C}(X, Y) \tag{62}$$

Bemerkungen

- Varianzen von Zufallsvariablen addieren sich nicht einfach.
- Die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen hängt von ihrer Kovarianz ab.

Beweis

Wir halten zunächst fest, dass

$$\mathbb{E}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) + c. \tag{63}$$

Es ergibt sich also

$$\begin{aligned}
&\mathbb{V}(aX + bY + c) \\
&= \mathbb{E}\left((aX + bY + c - a\mathbb{E}(X) - b\mathbb{E}(Y) - c)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((a(X - \mathbb{E}(X)) + b(Y - \mathbb{E}(Y)))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(a^2(X - \mathbb{E}(X))^2 + b^2(Y - \mathbb{E}(Y))^2 + 2ab(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right) \\
&= a^2\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) + b^2\mathbb{E}\left((Y - \mathbb{E}(Y))^2\right) + 2ab\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right) \\
&= a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y) + 2ab\mathbb{C}(X, Y)
\end{aligned} \tag{64}$$

Die Spezialfälle folgen dann direkt mit $a := b := 1$ und $a := 1, b := -1$, respektive.

□

Erwartungswert

Varianz und Standardabweichung

Stichprobenmittel, Stichprobenvarianz, Stichprobenstandardabweichung

Kovarianz und Korrelation

Stichprobenkovarianz und Stichprobenkorrelation

Selbstkontrollfragen

Definition (Stichprobenkovarianz und Stichprobenkorrelation)

$(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ seien zweidimensionale Zufallsvektoren.

- Das Stichprobenmittel der $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ ist definiert als

$$\overline{(X,Y)}_n := (\bar{X}_n, \bar{Y}_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i\right). \tag{65}$$

- Die Stichprobenkovarianz der $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ ist definiert als

$$C_n := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n). \tag{66}$$

- Der Stichprobenkorrelationskoeffizient der $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ ist definiert als

$$R_n := \frac{C_n}{S_{X,n} S_{Y,n}}, \tag{67}$$

wobei $S_{X,n}$ und $S_{Y,n}$ die Stichprobenstandardabweichungen von $X_1, ..., X_n$ und $Y_1, ..., Y_n$, bezeichnen.

Bemerkungen

- $\overline{(X,Y)}_n$, C_n, und R_n sind Zufallsvariablen
- $\overline{(x,y)}_n$, c_n, und r_n bezeichnen ihre Realisierungen

Stichprobenkovarianz und Stichprobenkorrelation

Beispiel (Stichprobenkovarianz und Stichprobenkorrelation)

- Es seien $(X_1, Y_1), ..., (X_{10}, Y_{10})$ zweidimensionale Zufallsvariablen.
- Wir nehmen folgende Realisierungen an

(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_3)	(x_4, y_4)	(x_5, y_5)	(x_6, y_6)	(x_7, y_7)	(x_8, y_8)	(x_9, y_9)	(x_{10}, y_{10})
(0.8, -0.7)	(1.1, 1.6)	(-0.8, 1.1)	(-0.2, 0.1)	(1.1, 0.4)	(0.5, 1.5)	(1.3, -1.2)	(1.8, 0.6)	(0.4, 0.2)	(1.5, -1.0)

- Die Stichprobenmittelrealisation ergibt sich zu

$$\overline{(x, y)}_{10} = \left(\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i, \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i\right) = (0.75, 0.26). \tag{68}$$

- Die Stichprobenstandardabweichungrealisationen ergeben sich zu

$$s_{X,n} = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x}_{10})^2} = 0.79 \text{ und } s_{Y,n} = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(y_i - \bar{y}_{10})^2} = 0.99. \tag{69}$$

- Die Stichprobenkovarianz- und Stichprobenkorrelationsrealisationen ergeben sich zu

$$c_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n) = -0.26 \text{ und } r_n = \frac{c_n}{s_{x,n}s_{y,n}} = -0.33. \tag{70}$$

Erwartungswert

Varianz und Standardabweichung

Stichprobenmittel, Stichprobenvarianz, Stichprobenstandardabweichung

Kovarianz und Korrelation

Stichprobenkovarianz und Stichprobenkorrelation

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Definieren und interpretieren Sie den Erwartungswert einer Zufallsvariable.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert einer Bernoulli Zufallsvariable.
3. Nennen Sie drei Eigenschaften des Erwartungswerts.
4. Definieren und interpretieren Sie die Varianz einer Zufallsvariable.
5. Berechnen Sie die Varianz einer Bernoulli Zufallsvariable.
6. Drücken Sie $\mathbb{E}(X^2)$ mithilfe der Varianz und des Erwartungswerts von X aus.
7. Was ist $\mathbb{V}(aX)$ für konstantes $a \in \mathbb{R}$?
8. Definieren Sie die Kovarianz und Korrelation zweier Zufallsvariablen X und Y.
9. Geben Sie das Theorem zur Varianz von Linearkombinationen von Zufallsvariablen bei Unabhängigkeit wieder.
10. Definieren Sie den Begriff der Stichprobe.
11. Definieren Sie den Begriff des Stichprobenmittels.
12. Definieren Sie Stichprobenvarianz und Stichprobenstandardabweichung.

Selbstkontrollfragen

13. Erläutern Sie die Unterschiede zwischen dem Erwartungswertparameter, dem Erwartungswert und dem Stichprobenmittel von normalverteilten Zufallsvariablen.
14. Definieren Sie die Kovarianz und die Korrelation zweier Zufallsvariablen.
15. Schreiben Sie die Kovarianz zweier Zufallsvariablen mithilfe von Erwartungswerten.
16. Geben Sie das Theorem zur Korrelation und Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen wieder.
17. Was ist die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen bei Unabhängigkeit?
18. Was ist die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen im Allgemeinen?
19. Definieren Sie das Stichprobenmittel für eine Stichprobe zweidimensionaler Zufallsvektoren.
20. Definieren Sie die Stichprobenkovarianz einer Stichproben von zweidimensionaler Zufallsvektoren.
21. Wann ergeben sich für die Stichprobenkovarienz hohe positive oder hohe negative Werte?
22. Wann ergeben sich für die Stichprobenkovarianz Werte nahe Null?
23. Definieren Sie den Stichprobenkorrelationskoeffizient.

References

Lange, Tatjana, and Karl Mosler. 2017. *Statistik kompakt*. Springer-Lehrbuch. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-53467-0.