Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2021/22

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(5) Multivariate Verteilungen

Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

Datum	Einheit	Thema
14.10.2021	Einführung	(1) Einführung
21.10.2021	Wahrscheinlichkeitstheorie	(2) Wahrscheinlichkeitsräume
28.10.2021	Wahrscheinlichkeitstheorie	(3) Elementare Wahrscheinlichkeiten
04.11.2021	Wahrscheinlichkeitstheorie	(4) Zufallsvariablen
11.11.2021	**Wahrscheinlichkeitstheorie**	**(5) Multivariate Verteilungen**
18.11.2021	Wahrscheinlichkeitstheorie	(6) Erwartungswert und Kovarianz
25.11.2021	Wahrscheinlichkeitstheorie	(7) Ungleichungen und Grenzwerte
02.12.2021	Wahrscheinlichkeitstheorie	(8) Normalverteilungstransformationen
09.12.2021	Frequentistische Inferenz	(9) Modelle, Statistiken und Schätzer
16.12.2021	Frequentistische Inferenz	(10) Schätzereigenschaften
	Weihnachtspause	
06.01.2022	Frequentistische Inferenz	(11) Konfidenzintervalle
13.01.2022	Frequentistische Inferenz	(12) Hypothesentests
20.01.2022	Frequentistische Inferenz	(13) Einstichproben-T-Tests
27.01.2022	Frequentistische Inferenz	(14) Zweistichproben-T-Tests
31.01 2022	**Klausur**	**16 - 17 Uhr, G44 - H6**
Jul 2022	Klausurwiederholungstermin	

Repräsentation zentraler Eigenschaften

Modellierung

Modell

Wahrscheinlichkeitstheorie

Probabilistisches Modell

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), X : \Omega \to \mathbb{R}$

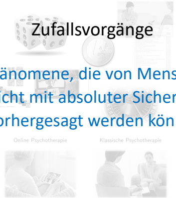
Wahrscheinlichkeitsrechnung

$\mathbb{P}_X(S) = \mathbb{P}(X^{-1}(S))$

Realität

Zufallsvorgänge

Phänomene, die von Menschen nicht mit absoluter Sicherheit vorhergesagt werden können.



Vorhersagen

Quantifizierung von Unsicherheit

Wir nehmen an, dass die BDI Scores der Proband:innen Realisierungen **unabhängiger und identisch** normalverteilter Zufallsvariablen sind.

Modellierung

Modell

Wahrscheinlichkeitstheorie

$$X_{1j} \sim N(\mu_1, \sigma^2), j = 1, \dots, n_1$$

$$X_{2j} \sim N(\mu_2, \sigma^2), j = 1, \dots, n_2$$

Realität

Zufallsvorgang

Online Psychotherapie

Klassische Psychotherapie

Klinische Studie zum Vergleich der Effekte von Klassischer und Online PT bei Depression

Patient ID	Bedingung	Prae-PT BDI	Post-PT BDI	(Post-Prae) PT BDI
1	Online	29	19	-10
2	Online	27	30	3
3	Klassisch	16	11	-5
4	Online	19	26	7
5	Online	35	29	-6
6	Klassisch	48	10	-38
7	Online	20	15	-5
8	Online	18	11	-7
9	Online	48	28	-20
10	Klassisch	49	23	-26
11	Klassisch	39	10	-29
12	Online	36	24	-12
13	Online	21	27	6
14	Online	46	14	-32
15	Online	20	17	-3
16	Klassisch	23	10	-13

Vorhersagen

Definition

Multivariate Verteilungen

Marginalverteilungen

Bedingte Verteilungen

Unabhängige Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

Definition

Multivariate Verteilungen

Marginalverteilungen

Bedingte Verteilungen

Unabhängige Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

Definition (Zufallsvektor)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ sei ein n-dimensionaler Messraum. Ein n-dimensionaler *Zufallsvektor* ist definiert als eine Abbildung

$$X : \Omega \to \mathcal{X}, \omega \mapsto X(\omega) := \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \tag{1}$$

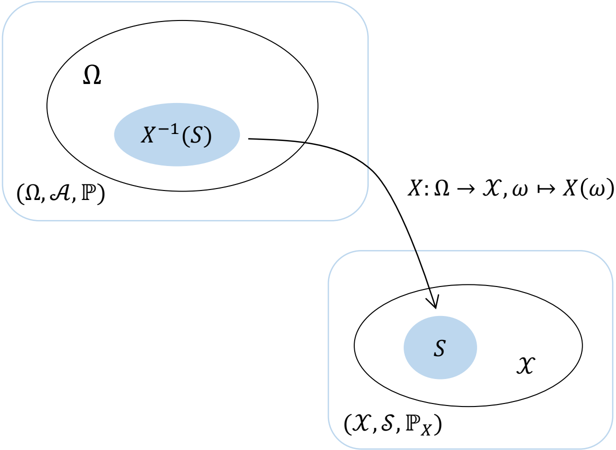
mit der *Messbarkeitseigenschaft*

$$\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in S\} \in \mathcal{A} \text{ für alle } S \in \mathcal{S}. \tag{2}$$

Bemerkungen

- X ist messbar, wenn die Komponentenfunktionen $X_1, ..., X_n$ messbar sind.
- Die Komponentenfunktionen eines Zufallsvektors sind Zufallsvariablen.
- Ein n-dimensionaler Zufallsvektor ist die Konkatenation von n Zufallsvariablen.
- Für einen Zufallsvektor schreiben wir auch häufig $X := (X_1, ..., X_n)$.
- Für $n := 1$ ist ein Zufallsvektor eine Zufallsvariable.

Definition



$$X : \Omega \to \mathcal{X}, \omega \mapsto X(\omega) := \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}\left(X^{-1}(S)\right) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in S\}) =: \mathbb{P}_X(S)$$

Definition

Multivariate Verteilungen

Marginalverteilungen

Bedingte Verteilungen

Unabhängige Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

Definition (Multivariate Verteilung)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ sei ein n-dimensionaler Messraum und

$$X : \Omega \to \mathcal{X}, \omega \mapsto X(\omega) \tag{3}$$

sei ein Zufallsvektor. Dann heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_X$, definiert durch

$$\mathbb{P}_X : \mathcal{S} \to [0,1], S \mapsto \mathbb{P}_X(S) := \mathbb{P}(X^{-1}(S)) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in S\}\right) \tag{4}$$

die *multivariate Verteilung des Zufallsvektor* X.

Bemerkungen

- Der Einfachheit halber spricht man oft auch nur von "der Verteilung des Zufallsvektors X."
- Die Notationskonventionen für Zufallsvariablen gelten für Zufallsvektoren analog, z.B.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_X(X \in S) &:= \mathbb{P}\left(\{X \in S\}\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in S\}\right) \\
\mathbb{P}_X(X = x) &:= \mathbb{P}\left(\{X = x\}\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}\right) \\
\mathbb{P}_X(X \le x) &:= \mathbb{P}\left(\{X \le x\}\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \le x\}\right) \\
\mathbb{P}_X(x_1 \le X \le x_2) &:= \mathbb{P}\left(\{x_1 \le X \le x_2\}\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega | x_1 \le X(\omega) \le x_2\}\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

- Relationsoperatoren wie $\le$ werden hier *komponentenweise* verstanden.
- Zum Beispiel heißt $x \le y$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$, dass $x_i \le y_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

Definition (Multivariate kumulative Verteilungsfunktionen)

X sei ein Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathcal{X}$. Dann heißt eine Funktion der Form

$$P_X : \mathcal{X} \to [0,1],\ x \mapsto P_X(x) := \mathbb{P}_X(X \le x) \tag{6}$$

multivariate kumulative Verteilungsfunktion von X.

Bemerkung

- Multivariate kumulative Verteilungsfunktionen können zur Definition von multivariaten Verteilungen genutzt werden, häufiger ist allerdings die Definition multivariater Verteilungen durch multivariate Wahrscheinlichkeitsmasse- oder Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen.

© 2022 Dirk Ostwald CC BY-NC-SA 4.0

Definition (Diskreter Zufallsvektor, multivariate WMF)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathcal{X}$ ein Zufallsvektor. X heißt *diskreter Zufallsvektor*, wenn der Ergebnisraum $\mathcal{X}$ endlich viele oder höchsten abzählbar viele Elemente $x_i, i = 1, 2, ...$ enthält. Die *multivariate Wahrscheinlichkeitsmassefunktion (WMF)* eines diskreten Zufallsvektors X wird mit p_X bezeichnet und ist definiert durch

$$p_X : \mathcal{X} \to [0, 1], x \mapsto p_X(x) := \mathbb{P}_X(X = x). \tag{7}$$

Bemerkungen

- Der Begriff der multivariaten WMF ist analog zum Begriff der WMF.
- Man spricht oft einfach von der WMF eines Zufallsvektors.
- Wie univariate WMFen sind multivariate WMFen nicht-negativ und normiert.

© 2022 Dirk Ostwald CC BY-NC-SA 4.0

Multivariate Verteilungen

Beispiel (Multivariate Wahrscheinlichkeitsmassefunktion)

Wir betrachten einen zweidimensionalen Zufallsvektor $X := (X_1, X_2)$ der Werte in $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ annimmt, wobei $\mathcal{X}_1 := \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{X}_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ seien.

Eine exemplarische bivariate WMF der Form

$$p_X : \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\} \to [0, 1], (x_1, x_2) \mapsto p_X(x_1, x_2) \tag{8}$$

ist dann durch nachfolgende Tabelle definiert.

$p_X(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$
$x_1 = 1$	0.1	0.0	0.2	0.1
$x_1 = 2$	0.1	0.2	0.0	0.0
$x_1 = 3$	0.0	0.1	0.1	0.1

Man beachte, dass $\sum_{x_1=1}^{3} \sum_{x_2=1}^{4} p_X(x_1, x_2) = 1$.

Definition (Kontinuierlicher Zufallsvektor, multivariate WDF)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ein Zufallsvektor der Form $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt *kontinuierlicher* Zufallsvektor. Die *multivariate Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF)* eines kontinuierlichen Zufallsvektors X ist eine Funktion

$$p_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto p_X(x), \tag{9}$$

mit den Eigenschaften

(1) $\int_{\mathbb{R}^n} p_X(x)\, dx = 1$

(2) $\mathbb{P}_X(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_{1_1}}^{x_{2_1}} \cdots \int_{x_{1_n}}^{x_{2_n}} p_X(s_1, ..., s_n)\, ds_1 \cdots ds_n$

Bemerkungen

- Der Begriff der multivariaten WDF ist analog zum Begriff der WDF.
- Man spricht häufig auch einfach von der WDF eines Zufallsvektors
- Wie univariate WDFen sind multivariate WDFen nicht-negativ und normiert.
- Wie für kontinuierliche Zufallsvariablen gilt für kontinuierliche Zufallsvektoren

$$\mathbb{P}_X(X = x) = \mathbb{P}_X(x \leq X \leq x) = \int_{x_1}^{x_1} \cdots \int_{x_n}^{x_n} p_X(s_1, ..., s_n)\, ds_1 \cdots ds_n = 0 \tag{10}$$

Definition

Multivariate Verteilungen

Marginalverteilungen

Bedingte Verteilungen

Unabhängige Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

Definition (Univariate Marginalverteilung)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ sei ein n-dimensionaler Messraum, $X : \Omega \to \mathcal{X}$ sei ein Zufallsvektor, $\mathbb{P}_X$ sei die Verteilung von X, $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{X}$ sei der Ergebnisraum der $i$ten Komponente X_i von X, und $\mathcal{S}_i$ sei eine σ-Algebra auf X_i. Dann heißt die durch

$$\mathbb{P}_{X_i} : \mathcal{S}_i \to [0,1], S \mapsto \mathbb{P}_X\left(\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_{i-1} \times S \times \mathcal{X}_{i+1} \times \cdots \times \mathcal{X}_n\right) \text{ für } S \in \mathcal{S}_i \quad (11)$$

definierte Verteilung die *$i$te univariate Marginalverteilung von X*.

Bemerkungen

- Univariate Marginalverteilungen sind die Verteilungen der Komponenten eines Zufallsvektors.
- Univariate Marginalverteilungen sind Verteilungen von Zufallsvariablen.
- Die Festlegung der multivariaten Verteilung von X legt auch die Verteilungen der X_i fest.

Theorem (Marginale Wahrscheinlichkeitsmasse- und dichtefunktionen)

(1) $X = (X_1, ..., X_n)$ sei ein n-dimensionaler diskreter Zufallsvektor mit Wahrscheinlichkeitsmassefunktion p_X und Komponentenergebnisräumen $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_n$. Dann ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsmassefunktion der $i$ten Komponente X_i von X als

$$p_{X_i} : \mathcal{X}_i \to [0,1], x_i \mapsto p_{X_i}(x_i) := \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{i-1}} \sum_{x_{i+1}} \cdots \sum_{x_n} p_X(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) \quad (12)$$

(2) $X = (X_1, ..., X_n)$ sei ein n-dimensionaler kontinuierlicher Zufallsvektor mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion p_X und Komponentenergebnisraum $\mathbb{R}$. Dann ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der $i$ten Komponente X_i von X als

$$p_{X_i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x_i \mapsto p_{X_i}(x_i) := \int_{x_1} \cdots \int_{x_{i-1}} \int_{x_{i+1}} \cdots \int_{x_n} p_X(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)\, dx_1 ... dx_{i-1}\, dx_{i+1} ... dx_n. \quad (13)$$

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Die WMFen der univariaten Marginalverteilungen diskreter Zufallsvektoren ergeben sich durch Summation.
- Die WDFen der univariaten Marginalverteilungen kontinuierlicher Zufallsvektoren ergeben sich durch Integration.

Beispiel (Marginale Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen)

Wir betrachten erneut den zweidimensionalen Zufallsvektor $X := (X_1, X_2)$ der Werte in $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ annimmt, wobei $\mathcal{X}_1 := \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{X}_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ seien.

Basierend auf der oben definierten WMF ergeben sich folgende marginalen WMFen p_{X_1} und p_{X_2}

$p_X(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$p_{X_1}(x_1)$
$x_1 = 1$	0.1	0.0	0.2	0.1	0.4
$x_1 = 2$	0.1	0.2	0.0	0.0	0.3
$x_1 = 3$	0.0	0.1	0.1	0.1	0.3
$p_{X_2}(x_2)$	0.2	0.3	0.3	0.2	

Man beachte, dass $\sum_{x_1=1}^{3} p_{X_1}(x_1) = 1$ und $\sum_{x_2=1}^{3} p_{X_2}(x_2) = 1$ gilt.

Definition

Multivariate Verteilungen

Marginalverteilungen

Bedingte Verteilungen

Unabhängige Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

Vorbemerkungen

Wir erinnern uns, dass für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$ die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B definiert ist als

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{14}$$

Analog wird für zwei Zufallsvariablen X_1, X_2 mit Ereignisräumen $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ und (messbaren) Mengen $S_1 \in \mathcal{X}_1, S_2 \in \mathcal{X}_2$ die bedingte Verteilung von X_1 gegeben X_2 mithilfe der Ereignisse $A := \{X_1 \in S_1\}$ und $B := \{X_2 \in S_2\}$ definiert.

So ergibt sich zum Beispiel die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass $X_1 \in S_1$ gegeben dass $X_2 \in S_2$ unter der Annahme, dass $\mathbb{P}(\{X_2 \in S_2\}) > 0$, zu

$$\mathbb{P}(\{X_1 \in S_1\}|\{X_2 \in S_2\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X_1 \in S_1\} \cap \{X_2 \in S_2\})}{\mathbb{P}(\{X_2 \in S_2\})}. \tag{15}$$

In der Folge betrachten wir zunächst durch die WMFen/WDFen zweidimensionaler Zufallsvektoren definierte bedingte Verteilungen.

Definition (Bedingte WMF, diskrete bedingte Verteilung)

$X := (X_1, X_2)$ sei ein diskreter Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, WMF $p_X = p_{X_1,X_2}$ und marginalen WMFen p_{X_1} und p_{X_2}. Die bedingte WMF von X_1 gegeben $X_2 = x_2$ ist dann für $p_{X_2}(x_2) > 0$ definiert als

$$p_{X_1|X_2=x_2} : \mathcal{X}_1 \to [0,1], x_1 \mapsto p_{X_1|X_2=x_2}(x_1|x_2) := \frac{p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{p_{X_2}(x_2)} \tag{16}$$

Analog ist für $p_{X_1}(x_1) > 0$ die bedingte WMF von X_2 gegeben $X_1 = x_1$ definiert als

$$p_{X_2|X_1=x_1} : \mathcal{X}_2 \to [0,1], x_2 \mapsto p_{X_2|X_1=x_2}(x_1|x_2) := \frac{p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{p_{X_1}(x_1)} \tag{17}$$

Die bedingten Verteilungen mit WMFen $p_{X_1|X_2=x_2}$ und $p_{X_2|X_1=x_1}$ heißen dann die *diskreten bedingten Verteilungen von X_1 gegeben $X_2 = x_2$ und X_2 gegeben $X_1 = x_1$*, respektive.

Bemerkungen

- In Analogie zur Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit von Ereignissen gilt also

$$p_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{p_{X_2}(x_2)} = \frac{\mathbb{P}(\{X_1 = x_1\} \cap \{X_2 = x_2\})}{\mathbb{P}(\{X_2 = x_2\})}. \tag{18}$$

- Bedingte Verteilungen sind (lediglich) normalisierte gemeinsame Verteilungen.

Beispiel (Bedingte Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen)

Wir betrachten erneut den zweidimensionalen Zufallsvektor $X := (X_1, X_2)$ der Werte in $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ annimmt, wobei $\mathcal{X}_1 := \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{X}_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ seien.

Basierend auf der oben definierten WMF und den entsprechenden oben evaluierten marginalen WMFen ergeben sich folgende bedingte WMFen für $p_{X_2|X_1=x_1}$

\begin{table}

$p_{X_1 \mid X_2}(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$
$p_{X_2 \mid X_1 = 1}(x_2 \mid x_1 = 1)$	$\frac{0.1}{0.4} = 0.25$	$\frac{0.0}{0.4} = 0.00$	$\frac{0.2}{0.4} = 0.50$	$\frac{0.1}{0.4} = 0.25$
$p_{X_2 \mid X_1 = 2}(x_2 \mid x_1 = 2)$	$\frac{0.1}{0.3} = 0.3\bar{3}$	$\frac{0.2}{0.3} = 0.6\bar{6}$	$\frac{0.0}{0.3} = 0.00$	$\frac{0.0}{0.3} = 0.00$
$p_{X_2 \mid X_1 = 3}(x_2 \mid x_1 = 3)$	$\frac{0.0}{0.3} = 0.00$	$\frac{0.1}{0.3} = 0.3\bar{3}$	$\frac{0.1}{0.3} = 0.3\bar{3}$	$\frac{0.1}{0.3} = 0.3\bar{3}$

\end{table}

Bemerkungen

- Man beachte, dass $\sum_{x_2=1}^{4} p_{X_2|X_1=x_1}(x_2|x_1) = 1$ für alle $x_1 \in \mathcal{X}_1$.
- Man beachte die qualitative Ähnlichkeit der WMFen $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ und $p_{X_2|X_1}(x_2|x_1)$.
- Bedingte Verteilungen sind (lediglich) normalisierte gemeinsame Verteilungen.

Definition (Bedingte WDF, kontinuierliche bedingte Verteilungen)

$X := (X_1, X_2)$ sei ein kontinuierlicher Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathbb{R}^2$, WDF $p_X = p_{X_1,X_2}$ und marginalen WDFen p_{X_1} und p_{X_2}. Die bedingte WDF von X_1 gegeben $X_2 = x_2$ ist dann für $p_{X_2}(x_2) > 0$ definiert als

$$p_{X_1|X_2=x_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x_1 \mapsto p_{X_1|X_2=x_2}(x_1|x_2) := \frac{p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{p_{X_2}(x_2)} \tag{19}$$

Analog ist für $p_{X_1}(x_1) > 0$ die bedingte WMF von X_2 gegeben $X_1 = x_1$ definiert als

$$p_{X_2|X_1=x_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x_2 \mapsto p_{X_2|X_1=x_2}(x_2|x_1) := \frac{p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{p_{X_1}(x_1)} \tag{20}$$

Die Verteilungen mit WDFen $p_{X_1|X_2=x_2}$ und $p_{X_2|X_1=x_1}$ heißen dann die *kontinuierlichen bedingten Verteilungen von X_1 gegeben $X_2 = x_2$ und X_2 gegeben $X_1 = x_1$*, respektive.

Bemerkung

- Im kontinuierlichen Fall gilt zwar $\mathbb{P}(X = x) = 0$, aber nicht notwendig auch $p_X(x) = 0$.

Definition

Multivariate Verteilungen

Marginalverteilungen

Bedingte Verteilungen

Unabhängige Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

Definition (Unabhängige Zufallsvariablen)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X := (X_1, X_2)$ ein zweidimensionaler Zufallsvektor. Die Zufallsvariablen X_1, X_2 mit Ergebnisräumen $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ heißen *unabhängig*, wenn für alle $S_1 \subseteq \mathcal{X}_1$ und $S_2 \subseteq \mathcal{X}_2$ gilt, dass

$$\mathbb{P}_X(X_1 \in S_1, X_2 \in S_2) = \mathbb{P}_{X_1}(X_1 \in S_1)\mathbb{P}_{X_2}(X_2 \in S_2). \tag{21}$$

Bemerkungen

- Die Definition besagt, dass die Ereignisse $\{X_1 \in S_1\}$ und $\{X_2 \in S_2\}$ unabhängig sind.
- Es gilt also auch, dass $\mathbb{P}(\{X_1 \in S_1\})|\{X_2 \in S_2\}) = \mathbb{P}(\{X_1 \in S_1\})$.
- Wissen um das Ereignis $\{X_2 \in S_2\}$ verändert die Wahrscheinlichkeit von $\{X_1 \in S_1\}$ nicht.
- Einen formaleren Zugang bietet das Konzept der *Produktwahrscheinlichkeitsräume*.

Theorem (Unabhängigkeit und Faktorisierung der WMF/WDF)

(1) $X := (X_1, X_2)$ sei ein diskreter Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, WMF p_X und marginalen WMFen p_{X_1}, p_{X_2}. Dann gilt

$$X_1 \text{ und } X_2 \text{ sind unabhängige Zufallsvariablen} \Leftrightarrow$$

$$p_X(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2) \text{ für alle } (x_1, x_2) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2. \quad (22)$$

(2) $X := (X_1, X_2)$ sei ein kontinuierlicher Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathbb{R}^2$, WDF p_X und marginalen WMFen p_{X_1}, p_{X_2}. Dann gilt

$$X_1 \text{ und } X_2 \text{ sind unabhängige Zufallsvariablen} \Leftrightarrow$$

$$p_X(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2) \text{ für alle } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (23)$$

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Die Produkteigenschaft $p_X(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$ heißt auch *Faktorisierung*.
- Unabhängigkeit zweier ZVen entspricht der Faktorisierung ihrer gemeinsamen WMF/WDF.

Beispiel (Unabhängige diskrete Zufallsvariablen)

Wir betrachten erneut den zweidimensionalen Zufallsvektor $X := (X_1, X_2)$, der Werte in $\{1,2,3\} \times \{1,2,3,4\}$ annimmt, und dessenn gemeinsame und marginale WMFen die untenstehende Form haben

$p_X(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$p_{X_1}(x_1)$
$x_1 = 1$	0.10	0.00	0.20	0.10	0.40
$x_1 = 2$	0.10	0.20	0.00	0.00	0.30
$x_1 = 3$	0.00	0.10	0.10	0.10	0.30
$p_{X_2}(x_2)$	0.20	0.30	0.30	0.20	

Da hier gilt, dass

$$p_X(1,1) = 0.10 \neq 0.08 = 0.40 \cdot 0.20 = p_{X_1}(1)p_{X_2}(1) \tag{24}$$

sind die Zufallsvariablen X_1 und X_2 nicht unabhängig.

Beispiel (Unabhängige diskrete Zufallsvariablen)

Die gemeinsame Verteilung von X_1 und X_2 unter der Annahme der Unabhängigkeit von X_1 und X_2 bei gleichen Marginalverteilungen ergibt sich zu

$p_X(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$p_{X_1}(x_1)$
$x_1 = 1$	0.08	0.12	0.12	0.08	0.40
$x_1 = 2$	0.06	0.09	0.09	0.06	0.30
$x_1 = 3$	0.06	0.09	0.09	0.06	0.30
$p_{X_2}(x_2)$	0.20	0.30	0.30	0.20	

Weiterhin ergeben sich im Falle der Unabhängigkeit von X_1 und X_2 zum Beispiel die bedingten Wahrscheinlichkeitsmassefunktion $p_{X_2|X_1}$ zu

$p_{X_1|X_2}(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$
$p_{X_2|X_1=1}(x_2|x_1 = 1)$	$\frac{0.08}{0.40} = 0.2$	$\frac{0.12}{0.40} = 0.3$	$\frac{0.12}{0.40} = 0.3$	$\frac{0.08}{0.40} = 0.2$
$p_{X_2|X_1=2}(x_2|x_1 = 2)$	$\frac{0.06}{0.30} = 0.2$	$\frac{0.09}{0.30} = 0.3$	$\frac{0.09}{0.30} = 0.3$	$\frac{0.06}{0.30} = 0.2$
$p_{X_2|X_1=3}(x_2|x_1 = 3)$	$\frac{0.06}{0.30} = 0.2$	$\frac{0.09}{0.30} = 0.3$	$\frac{0.09}{0.30} = 0.3$	$\frac{0.06}{0.30} = 0.2$

Im Falle der Unabhängigkeit von X_1 und X_2 ändert sich die Verteilung von X_2 gegeben (oder im Wissen um) den Wert von X_1 also nicht und entspricht jeweils der Marginalverteilung von X_2. Dies entspricht natürlich der Intuition der Unabhängigkeit von Ereignissen im Kontext elementarer Wahrscheinlichkeiten.

Unabhängige Zufallsvariablen

Definition (n unabhängige Zufallsvariablen)

$X := (X_1, ..., X_n)$ sei ein n-dimensionaler Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathcal{X} = \times_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i$. Die n Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ heißen *unabhängig*, wenn für alle $S_i \in \mathcal{X}_i, i = 1, ..., n$ gilt, dass

$$\mathbb{P}_X(X_1 \in S_1, ..., X_n \in S_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{X_i}(X_i \in S_i). \tag{25}$$

Wenn der Zufallsvektor eine n-dimensionale WMF oder WDF p_X mit marginalen WMFen oder WDFen $p_{X_i}, i = 1, ..., n$ besitzt, dann ist die Unabhängigkeit von $X_1, ..., X_n$ gleichbedeutend mit der Faktorisierung der gemeinsamen WMF oder WDF, also mit

$$p_X(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i). \tag{26}$$

Bemerkung

- Es handelt sich um eine direkte Generalisierung des zweidimensionalen Falls.

Definition (Unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen)

n Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ heißen *unabhängig und identisch verteilt (u.i.v.)*, wenn

(1) $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen sind, und

(2) die Marginalverteilungen der X_i übereinstimmen, also gilt, dass

$$p_{X_i} = p_{X_j} \text{ für alle } 1 \le i, j \le n. \tag{27}$$

Wenn die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ unabhängig und identisch verteilt sind und die $i$te Marginalverteilung $\mathbb{P}_X := \mathbb{P}_{X_i}$ ist, so schreibt man auch

$$X_1, ..., X_n \sim \mathbb{P}_X. \tag{28}$$

Bemerkungen

- Man sagt kurz, dass $X_1, ..., X_n$ u.i.v. sind.
- Im Englischen spricht man von *independent and identically distributed (i.i.d)* Zufallsvariablen.
- In der Statistik werden Stichproben meist mit u.i.v. Zufallsvariablen modelliert.
- n u.i.v. normalverteilte ZVen werden als $X_1, ..., X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ geschrieben.

Definition

Multivariate Verteilungen

Marginalverteilungen

Bedingte Verteilungen

Unabhängige Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Definieren Sie den Begriff des Zufallsvektors.
2. Definieren Sie den Begriff der multivariaten Verteilung eines Zufallsvektors.
3. Definieren Sie den Begriff der multivariaten WMF.
4. Definieren Sie den Begriff der multivariaten WDF.
5. Definieren Sie den Begriff der univariaten Marginalverteilung eines Zufallsvektors.
6. Wie berechnet man die WMF der $i$ten Komponente eines diskreten Zufallsvektors?
7. Wie berechnet man die WDF der $i$ten Komponente eines kontinuierlichen Zufallsvektors?
8. Definieren Sie den Begriff der Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen.
9. Wie erkennt man an der gemeinsamen WMF oder WDF eines zweidimensionalen Zufallsvektors, ob die Komponenten des Zufallsvektors unabhängig sind oder nicht?
10. Definieren Sie den Begriff der Unabhängigkeit von n Zufallsvariablen.
11. Definieren Sie den Begriff n unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen.