# Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2021/22

Prof. Dr. Dirk Ostwald

# (2) Wahrscheinlichkeitsräume

# Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

| Datum | Einheit | Thema |
|---|---|---|
| 14.10.2021 | Einführung | (1) Einführung |
| **21.10.2021** | **Wahrscheinlichkeitstheorie** | **(2) Wahrscheinlichkeitsräume** |
| 28.10.2021 | Wahrscheinlichkeitstheorie | (3) Elementare Wahrscheinlichkeiten |
| 04.11.2021 | Wahrscheinlichkeitstheorie | (4) Zufallsvariablen |
| 11.11.2021 | Wahrscheinlichkeitstheorie | (5) Zufallsvektoren |
| 18.11.2021 | Wahrscheinlichkeitstheorie | (6) Erwartungswert und Kovarianz |
| 25.11.2021 | Wahrscheinlichkeitstheorie | (7) Ungleichungen und Grenzwerte |
| 02.12.2021 | Wahrscheinlichkeitstheorie | (8) Normalverteilungstransformationen |
| 09.12.2021 | Frequentistische Inferenz | (9) Modelle, Statistiken und Schätzer |
| 16.12.2021 | Frequentistische Inferenz | (10) Schätzereigenschaften |
| | Weihnachtspause | |
| 06.01.2022 | Frequentistische Inferenz | (11) Konfidenzintervalle |
| 13.01.2022 | Frequentistische Inferenz | (12) Hypothesentests |
| 20.01.2022 | Frequentistische Inferenz | (13) Einstichproben-T-Tests |
| 27.01.2022 | Frequentistische Inferenz | (14) Zweistichproben-T-Tests |
| Feb 2022 | Klausurtermin | |
| Jul 2022 | Klausurwiederholungstermin | |

## Statistik

Die Kunst, aus Daten Sinn zu generieren

**und seine assoziierte Unsicherheit zu quantifizieren**

Repräsentation zentraler Eigenschaften

Modellierung

## Modell

Wahrscheinlichkeitstheorie

Probabilistisches Modell

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), X : \Omega \to \mathbb{R}$

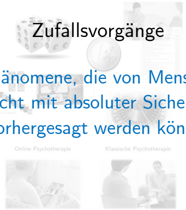
Wahrscheinlichkeitsrechnung

$\mathbb{P}_X(S) = \mathbb{P}(X^{-1}(S))$

## Realität

Zufallsvorgänge

Phänomene, die von Menschen nicht mit absoluter Sicherheit vorhergesagt werden können.




Vorhersagen

Quantifizierung von Unsicherheit

Jedes Augenzahlpaar kommt im Mittel gleich häufig vor.

Basierend auf der Physik sollte jedes Augenzahlpaar die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

Modellierung

## Modell

Wahrscheinlichkeitstheorie

$$\Omega \coloneqq \{(r,b) | r \in \mathbb{N}_6, b \in \mathbb{N}_6\}$$

$$\mathcal{A} \coloneqq \mathcal{P}(\Omega)$$

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) \coloneqq \frac{1}{36}$$

## Realität

Zufallsvorgang


Vorhersagen

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der gefallenen Augenzahlen 4 ist, ist $0.08\overline{3}$.

Bei 100 Würfelwürfen ist die Summe der gefallenen Augenzahlen im Durchschnitt 8.3 Mal gleich 4.

Definition

Erste Eigenschaften

Wahrscheinlichkeitsfunktionen

Beispiele

Selbstkontrollfragen

**Definition**

Erste Eigenschaften

Wahrscheinlichkeitsfunktionen

Beispiele

Selbstkontrollfragen

# Definition

## Definition (Wahrscheinlichkeitsraum)

Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* ist ein Triple $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, wobei

- $\Omega$ eine beliebige nichtleere Menge von *Ergebnissen* $\omega$ ist und *Ergebnismenge* heißt,
- $\mathcal{A}$ eine *$\sigma$-Algebra auf* $\Omega$ ist und *Ereignissystem* heißt,
- $\mathbb{P}$ eine Abbildung der Form $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ mit den Eigenschaften
  - *Nicht-Negativität* $\mathbb{P}(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$,
  - *Normiertheit* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ und
  - *$\sigma$-Additivität* $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ für paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$

  ist und *Wahrscheinlichkeitsmaß* heißt.

Das Tuple $(\Omega, \mathcal{A})$ aus Ergebnismenge und Ereignissystem wird als *Messraum* bezeichnet.

Bemerkung

- Die Definition benutzt den Begriff der *$\sigma$-Algebra*.

## Definition ($\sigma$-Algebra)

$\Omega$ sei eine Menge und $\mathcal{A}$ sei eine Menge von Teilmengen von $\Omega$. $\mathcal{A}$ heißt *$\sigma$-Algebra auf $\Omega$*, wenn

- $\Omega \in \mathcal{A}$ ist,
- $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter der Bildung von Komplementärmengen ist, also wenn für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt, dass auch $A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ ist,
- $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter der abzählbaren Vereinigung von Ereignissen ist, also wenn aus $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ folgt, dass auch $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ ist.

Bemerkungen

- Eine $\sigma$-Algebra ist eine Menge von Mengen.
- Eine als bekannt vorausgesetzte andere Menge von Mengen ist die *Potenzmenge*.
- Mengen von Mengen heißen auch *Mengensysteme*.

# Definition

ERGEBNISSE DER MATHEMATIK UND IHRER GRENZGEBIETE
HERAUSGEGEBEN VON DER SCHRIFTLEITUNG DES „ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK"
ZWEITER BAND
3

GRUNDBEGRIFFE DER WAHRSCHEINLICHKEITS-RECHNUNG

VON

A. KOLMOGOROFF

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1933



erniedrigt. Ist jedoch die Anzahl der Behauptungen sehr groß, so lassen sich aus der praktischen Sicherheit jeder einzelnen dieser Behauptungen in bezug auf die Richtigkeit der simultanen Behauptung überhaupt keine Schlüsse ziehen. Deshalb folgt aus dem Prinzip $A$ noch keineswegs, daß bei einer sehr großen Anzahl von Serien von Versuchen, von denen jede Serie aus $n$ Versuchen besteht, in *jeder* Serie der Quotient $m/n$ sich von $\mathsf{P}(A)$ wenig unterscheiden wird.

Bemerkung II. Dem unmöglichen Ereignis (der leeren Menge) entspricht kraft unserer Axiome die Wahrscheinlichkeit $\mathsf{P}(0) = 0$*, während umgekehrt aus $\mathsf{P}(A) = 0$ die Unmöglichkeit des Ereignisses $A$ durchaus nicht zu folgen braucht; nach dem Prinzip $B$ folgt aus dem Nullwerden der Wahrscheinlichkeit nur, daß bei einer einmaligen Realisation der Bedingungen $\mathfrak{S}$ das Ereignis $A$ praktisch unmöglich ist. Das bedeutet jedoch keineswegs, daß auch bei einer genügend langen Reihe von Versuchen das Ereignis $A$ nicht auftreten wird. Andererseits kann man nach dem Prinzip $A$ nur behaupten, daß bei $\mathsf{P}(A) = 0$ und sehr großem $n$ der Quotient $m/n$ sehr klein wird (er kann z. B. gleich $1/n$ sein).

## § 3. Terminologische Vorbemerkungen.

Wir haben die eigentlichen Objekte unserer weiteren Betrachtungen — die zufälligen Ereignisse — als Mengen definiert. Mehrere mengentheoretische Begriffe bezeichnet man aber in der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit anderen Namen. Wir wollen hier ein kurzes Verzeichnis solcher Begriffe geben.

| *Mengentheoretisch.* | *Im Falle der zufälligen Ereignisse.* |
|---|---|
| 1. $A$ und $B$ sind disjunkt, d. h. $AB = 0$. | 1. Die Ereignisse $A$ und $B$ sind unvereinbar. |
| 2. $AB \ldots N = 0$. | 2. Die Ereignisse $A, B, \ldots, N$ sind unvereinbar. |
| 3. $AB \ldots N = X$. | 3. Das Ereignis $X$ besteht in der gleichzeitigen Realisation aller Ereignisse $A, B, \ldots, N$. |
| 4. $A \dotplus B \dotplus \cdots \dotplus N = X$. | 4. Das Ereignis $X$ besteht in der Erscheinung mindestens eines unter den Ereignissen $A, B, \ldots, N$. |
| 5. Die Komplementärmenge $\bar{A}$. | 5. Das entgegengesetzte Ereignis $\bar{A}$ besteht in der Nichterscheinung des Ereignisses $A$. |
| 6. $A = 0$. | 6. $A$ ist unmöglich. |
| 7. $A = E$. | 7. $A$ muß notwendig vorkommen. |

* Vgl. § 3, Formel (3).



| | |
|---|---|
| 8. Ein System $\mathfrak{A}$ der Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bildet eine *Zerlegung* der Menge $E$, wenn $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = E$ ist (das setzt bereits voraus, daß die Mengen $A_i$ paarweise disjunkt sind). | 8. Ein *Versuch* $\mathfrak{A}$ besteht darin, daß man feststellt, welches unter den Ereignissen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vorkommt. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sind die möglichen Ausgänge des Versuches $\mathfrak{A}$. |
| 9. $B$ ist eine Untermenge von $A$: $B \subset A$. | 9. Aus der Realisation des Ereignisses $B$ folgt notwendig dieselbe von $A$. |

## § 4. Unmittelbare Folgerungen aus den Axiomen, bedingte Wahrscheinlichkeiten, der Satz von Bayes.

Aus $A + \bar{A} = E$ und den Axiomen IV und V folgt

$$\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\bar{A}) = 1, \tag{1}$$

$$\mathsf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathsf{P}(A). \tag{2}$$

Da $\bar{E} = 0$ ist, erhält man insbesondere

$$\mathsf{P}(0) = 0. \tag{3}$$

Wenn $A, B, \ldots, N$ unvereinbar sind, so folgt aus dem Axiom IV die Formel

$$\mathsf{P}(A + B + \cdots + N) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) + \cdots + \mathsf{P}(N) \tag{4}$$

(der Additionssatz).

Wenn $\mathsf{P}(A) > 0$ ist, so nennt man den Quotienten

$$\mathsf{P}_A(B) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(A)} \tag{5}$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses $B$ unter der Bedingung $A$. Aus (5) folgt unmittelbar

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}_A(B). \tag{6}$$

Ein Induktionsschluß ergibt sodann die allgemeine Formel

$$\mathsf{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}_{A_1}(A_2)\,\mathsf{P}_{A_1 A_2}(A_3) \ldots \mathsf{P}_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n) \tag{7}$$

(der Multiplikationssatz).

Man beweist auch leicht folgende Formeln:

$$\mathsf{P}_A(B) \geqq 0, \tag{8}$$

$$\mathsf{P}_A(E) = 1, \tag{9}$$

$$\mathsf{P}_A(B + C) = \mathsf{P}_A(B) + \mathsf{P}_A(C). \tag{10}$$

Vergleicht man diese Formeln (8) bis (10) mit den Axiomen III bis $V$, so ergibt sich, daß *das Mengensystem* $\mathfrak{F}$ *mit der Mengenfunktion* $\mathsf{P}_A(B)$

"Zweck des vorliegenden Heftes ist eine axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der leitende Gedanke des Verfassers war dabei, die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche noch unlängst für ganz eigenartig galten, natürlicherweise in die Reihe der allgemeinen Begriffsbildungen der modernen Mathematik [Mengen, Abbildungen] einzuordnen."

"Wir haben die eigentlichen Objekte unserer weiteren Betrachtungen - die zufälligen Ereignisse - als Mengen definiert."

Kolmogoroff (1933) [*1903 †1987]

# Definition

## Ergebnismenge $\Omega$

- Wir betrachten zunächst *endliche Wahrscheinlichkeitsräume* mit $|\Omega| < \infty$.
- $\Omega$ habe also nur endlich viele ("diskrete") Elemente.
- Zum Modellieren des Werfen eines Würfels definiert man z.B. $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

## Die stillschweigende Mechanik des Wahrscheinlichkeitsraummodells

- Wir stellen uns sequentielle *Durchgänge* eines *Zufallsvorgangs* vor.
- In jedem Durchgang wird genau ein $\omega$ aus $\Omega$ mit Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\{\omega\})$ *realisiert*.
- $\mathbb{P}(\{\omega\})$ bestimmt, mit welcher Wahrscheinlichkeit $\omega$ in einem Durchgang aus $\Omega$ realisiert wird.
- Beim Modell des Werfens eines fairen Würfels gilt etwa $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/6$ für alle $\omega \in \Omega$.
- Im 1. Durchgang wird z.B. "$4$" realisiert, im 2. Durchgang "$1$," im 3. Durchgang "$5$," usw.

# Definition

## Ereignisse $A \in \mathcal{A}$

- *Ereignisse* stellt man sich am besten als Zusammenfassung (ein oder) mehrerer Ergebnisse vor.
- Beim Werfen eines Würfels sind mögliche Ereignisse zum Beispiel

| | |
|---|---|
| Es fällt eine gerade Augenzahl, | das heißt $\omega \in \{2, 4, 6\}$ |
| Es fällt eine Augenzahl größer als Zwei, | das heißt $\omega \in \{3, 4, 5, 6\}$ |
| Es fällt eine Eins oder eine Fünf, | das heißt $\omega \in \{1, 5\}$ |

- Natürlich sind auch die Ergebnisse $\omega \in \Omega$ mögliche Ereignisse zum Beispiel

| | |
|---|---|
| Es fällt eine Eins, | das heißt $\omega \in \{1\}$ |
| Es fällt eine Sechs, | das heißt $\omega \in \{6\}$ |

- Betrachtet man $\omega \in \Omega$ als Ereignis, so nennt man es *Elementarereignis* und schreibt $\{\omega\}$.

"Wir haben die eigentlichen Objekte unserer weiteren Betrachtungen - die zufälligen Ereignisse - als Mengen definiert."

Kolmogoroff (1933) [*1903 †1987]

# Definition

## Ereignissystem $\mathcal{A}$

- Sinn des Ereignissystems ist es, alle Ereignisse, die sich basierend auf einer gegebenen Ergebnismenge bei Auswahl eines $\omega \in \Omega$ ergeben können, mathematisch zu repräsentieren.
- Das Ereignissystem $\mathcal{A}$ ist die vollständige Menge aller möglichen Ereignisse bei gegebenem $\Omega$.
- Die Forderung, dass $\mathcal{A}$ die $\sigma$-Algebra Kriterien erfüllt, begründet sich wie folgt
  - Es soll sichergestellt sein, dass $\omega \in \Omega$ für beliebiges $\omega$, dass also irgendein Ergebnis realisiert wird, eines der möglichen Ereignisse ist. Dies entspricht $\Omega \in \mathcal{A}$. Zu jedem Ereignis soll es auch möglich sein, dass dieses Ereignis gerade nicht eintritt. Dies entspricht, dass aus $A \in \mathcal{A}$ folgen soll, dass $A^c = \Omega \setminus A$ auch in $\mathcal{A}$ ist. Dies impliziert auch, dass $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{A}$. Ein Ereignis ist also, dass kein Elementarereignis eintritt, allerdings passiert dies nur mit Wahrscheinlichkeit Null, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Es tritt also sicher immer ein Elementarereignis ein. Die Kombination von Ereignissen soll auch immer ein Ereignis sein, z.B. "Es fällt eine gerade Zahl" und/oder "Es fällt eine Zahl größer 2". Dies entspricht, dass aus $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ folgen soll, dass auch $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.
- Für endliches $\Omega$ und für $\Omega := \mathbb{R}$ sind passende Ereignissysteme schon lange bekannt.

$$
\begin{aligned}
\Omega \text{ ist endlich} \quad & \Rightarrow \text{Man wählt für } \mathcal{A} \text{ die Potenzmenge von } \Omega \\
\Omega \text{ ist } \mathbb{R} \quad & \Rightarrow \text{Man wählt für } \mathcal{A} \text{ die } \textit{Borelsche } \sigma\textit{-Algebra } \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\
\Omega \text{ ist } \mathbb{R}^n \quad & \Rightarrow \text{Man wählt für } \mathcal{A} \text{ die } \textit{Borelsche } \sigma\textit{-Algebra } \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}
$$

## Theorem (Ereignissystem bei endlicher Ergebnismenge)

$\Omega := \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ sei eine endliche Menge. Dann ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ von $\Omega$ eine $\sigma$-Algebra auf $\Omega$ und damit ein geeignetes Ereignisssytem im Wahrscheinlichkeitsraummodell.

Beweis

Die Potenzmenge von $\Omega$ ist die Menge aller Teilmengen von $\Omega$. Wir überprüfen die $\sigma$-Algebra Eigenschaften. Zunächst gilt, dass $\Omega$ selbst eine der Teilmengen von $\Omega$ ist, also ist die erste $\sigma$-Algebra Eigenschaft erfüllt. Sei nun $A$ eine Teilmenge von $\Omega$. Dann ist auch $A^c = \Omega \setminus A$ eine Teilmenge von $\Omega$ und somit ist auch die zweite $\sigma$-Algebra Eigenschaft erfüllt. Schließlich betrachten wir die Vereinigung von $n$ Teilmengen $A_1, A_2, ..., A_n \subseteq \Omega$. Dann ist $\cup_{i=1}^n A_i$ die Menge der $\omega \in \Omega$ für die gilt, dass $\omega \in A_1$ und/oder $\omega \in A_2$ ... und/oder $\omega \in A_n$. Da für alle diese $\omega$ gilt, dass $\omega \in \Omega$ ist also auch $\cup_{i=1}^n A_i$ eine Teilmenge von $\Omega$ und damit auch die dritte $\sigma$-Algebra Eigenschaft erfüllt.

# Definition

## Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$

- $(\Omega, \mathcal{A})$ ist die *strukturelle Basis* eines Wahrscheinlichkeitsraummodells.
- $\mathbb{P}$ repräsentiert die probabilistischen Charakteristika eines Wahrscheinlichkeitsraummodells.
- $\mathbb{P}$ entspricht also der *funktionellen Basis* eines Wahrscheinlichkeitsraummodells.
- Es gilt $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$, $\mathbb{P}$ ordnet also (nur) Mengen Wahrscheinlichkeiten zu.
- Mit $\{\omega\} \in \mathcal{A} \, \forall \, \omega \in \Omega$ ordnet $\mathbb{P}$ auch den Elementareignissen Wahrscheinlichkeiten zu.
- Wahrscheinlichkeiten sind Zahlen in $[0, 1]$, nicht Prozente (20%) oder Verhältnisse (50:50).
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ entspricht der Tatsache, dass in jedem Durchgang sicher $\omega \in \Omega$ gilt.
- In jedem Durchgang eines Zufallsvorgangs tritt also zumindest ein Elementarereignis ein.

# Definition

## $\sigma$-Additivität des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$

- Die $\sigma$-Additivität von $\mathbb{P}$ erlaubt es, aus bereits bekannten Ereigniswahrscheinlichkeiten die Wahrscheinlichkeiten anderer Ereignisse zu berechnen.
- Die $\sigma$-Additivität ist also die Grundlage für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten, das heißt für die *Wahrscheinlichkeitsrechnung*.
- Man kann basierend auf einer Definition von $\Omega, \mathcal{A}$ und $\mathbb{P}$ also Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Ereignisse eines Wahrscheinlichkeitsraummodells berechnen. Ob diese Wahrscheinlichkeiten aber tatsächlich etwas mit den realen Ereignissen in einem Zufallsvorgang zu tun haben, kommt darauf an, ob die Modellierung einigermaßen gelungen ist oder nicht.
- Die hergeleiteten Wahrscheinlichkeiten werden zumindest nach den Regeln der Vernunft, also der Logik und der Mathematik, d.h. rational bestimmt.
- Insgesamt erlaubt das Wahrscheinlichkeitsmodell also das modellbasierte schlussfolgernde Denken über mit Unsicherheit behaftete Phänomene

Probability Theory $\Leftrightarrow$ Reasoning with Uncertainty

Definition

**Erste Eigenschaften**

Wahrscheinlichkeitsfunktionen

Beispiele

Selbstkontrollfragen

# Erste Eigenschaften

## Theorem (Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gilt

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0. \tag{1}$$

<u>Beweis</u>

Für $i = 1, 2, ...$ sei $A_i := \emptyset$. Dann ist $A_1, A_2, ...$ eine Folge disjunkter Ereignisse, weil gilt, dass $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ und es ist $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$. Mit der $\sigma$-Additivität von $\mathbb{P}$ folgt dann, dass

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) \tag{2}$$

Das unendliche Aufaddieren der Zahl $\mathbb{P}(\emptyset) \in [0, 1]$ soll also wieder $\mathbb{P}(\emptyset)$ ergeben. Dies ist aber nur möglich, wenn $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

$\square$

# Erste Eigenschaften

## Theorem ($\sigma$-Additivität bei endlichen Folgen disjunkter Ereignisse)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, ..., A_n$ sei eine endliche Folge paarweise disjunkter Ereignisse. Dann gilt

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i). \tag{3}$$

<u>Beweis</u>

Wir betrachten eine unendliche Folge von paarweise disjunkten Ereignissen $A_1, A_2, ...$ wobei für ein $n \in \mathbb{N}$ gelten soll, dass $A_i := \emptyset$ für $i > n$. Dann gilt mit der $\sigma$-Additivität von $\mathbb{P}$ zunächst, dass

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) + \sum_{i=n+1}^\infty \mathbb{P}(A_i). \tag{4}$$

Mit $\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ für $i = n+1, n+2, ...$ folgt dann direkt

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) + 0 = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i). \tag{5}$$

$\square$

Definition

Erste Eigenschaften

**Wahrscheinlichkeitsfunktionen**

Beispiele

Selbstkontrollfragen

## Definition (Wahrscheinlichkeitsfunktion)

$\Omega$ sei eine endliche Menge. Dann heißt eine Funktion $\pi : \Omega \to [0,1]$ *Wahrscheinlichkeitsfunktion*, wenn gilt, dass

$$\sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1. \tag{6}$$

Sei weiterhin $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann heißt die durch

$$\pi : \Omega \to [0,1], \omega \mapsto \pi(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\}) \tag{7}$$

definierte Funktion *Wahrscheinlichkeitsfunktion* von $\mathbb{P}$ auf $\Omega$.

Bemerkungen

- Wahrscheinlichkeitsfunktion erlauben im Falle endlicher Ergebnismengen das Festlegen von Wahrscheinlichkeitsmaßen durch die Definition der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse.
- Über alle Eingabewerte $\omega \in \Omega$ summieren die Funktionswerte $\pi(\omega)$ zu 1.
- Weil $\mathbb{P}$ per Definition $\sigma$-additiv ist, gilt insbesondere auch

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1. \tag{8}$$

## Theorem (Definition eines W-Maßes durch eine W-Funktion)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum mit endlicher Ergebnismenge und $\pi : \Omega \to [0,1]$ sei eine Wahrscheinlichkeitsfunktion. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\Omega$ mit $\pi$ als Wahrscheinlichkeitsfunktion von $\mathbb{P}$. Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß ist definiert als

$$\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1], A \mapsto \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \pi(\omega). \tag{9}$$

Bemerkung

- Bei endlichem $\Omega$ können die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ereignisse aus den Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse $\pi(\omega)$ berechnet werden.

Beweis

Wir überprüfen zunächst die Wahrscheinlichkeitsmaßeigenschaften von $\mathbb{P}$. Weil $\pi(\omega) \in [0,1]$ für alle $\omega \in \Omega$, gilt auch immer $\sum_{\omega \in A} \pi(\omega) \geq 0$ und damit die Nicht-Negativität von $\mathbb{P}$. Ferner folgt wie oben gesehen mit der Normiertheit von $\pi$ direkt die Normiertheit von $\mathbb{P}$. Seien nun $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{\omega \in \cup_{i=1}^{\infty} A_i} \pi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_i} \pi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i). \tag{10}$$

und damit die $\sigma$-Addivität von $\mathbb{P}$ $\square$.

Definition

Erste Eigenschaften

Wahrscheinlichkeitsfunktionen

**Beispiele**

Selbstkontrollfragen

# Beispiele

Aus dem bis hierin Gesagtem lässst sich nun zusammenfassend folgendes Vorgehen zur Modellierung eines Zufallsvorganges mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ festhalten:

(1) In einem ersten Schritt überlegt man sich eine sinnvolle Definition der Ergebnismenge $\Omega$, also der Ergebnisse bzw. Elementarereignisse die in jedem Durchgang des Zufallsvorgangs realisiert werden sollen.

(2) In einem zweiten Schritt wählt man dann ein geignetes Ereignissystem; im Falle einer endlichen Ergebnismenge bietet sich die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$, im Falle der überabzählbaren Ergebnismenge $\Omega := \mathbb{R}$ bietet sich die Borelsche $\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ an.

(3) Schließlich definiert man ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$, dass die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten aller möglichen Ereignisse repräsentiert. Im Falle einer endlichen Ergebnismenge gelingt dies inbesondere wie oben beschrieben durch Definition der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse. In der Folge verdeutlichen wir dieses Vorgehen anhand von Beispielen. Im Falle der überabzählbaren Ergebnismenge $\Omega := \mathbb{R}$ bietet sich die Definition von $\mathbb{P}$ mithilfe von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen an, wie wir später sehen werden.

# Beispiele

## Würfeln mit einem Würfel

Wir modellieren das Werfen eines Würfels. Es ist sicherlich sinnvoll, die Ergebnismenge als $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ zu definieren. Allerdings wäre auch die Definition von $\Omega := \{\cdot, \cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\}$ in äquivalenter Weise möglich.

Da es sich um eine endliche Ergebnismenge handelt, wählen wir als $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$. $\mathcal{A}$ enthält dann automatisch alle möglichen Ereignisse. Die Kardinalität von $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ ist $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^6 = 64$. In untenstehender Tabelle listen wir sechs dieser 64 Ereignisse in ihrer verbalen Beschreibung und als Teilmenge $A$ von $\Omega$.

Tabelle 1: Ausgewählte Ereignisse beim Modell des Werfen eines Würfels

| Beschreibung | Mengenform |
|---|---|
| Es fällt eine beliebige Augenzahl | $\omega \in A = \Omega$ |
| Keine Augenzahl fällt | $\omega \in A = \emptyset$ |
| Es fällt eine Augenzahl größer als 4 | $\omega \in A = \{5, 6\}$ |
| Es fällt eine gerade Augenzahl | $\omega \in A = \{2, 4, 6\}$ |
| Es fällt eine Sechs | $\omega \in A = \{6\}$ |
| Eine Eins, eine Drei oder eine Sechs fällt | $\omega \in A = \{1, 3, 6\}$ |

Damit ist die Definition des Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ in der Modellierung des Werfens eines Würfels abgeschlossen.

## Würfeln mit einem Würfel (fortgesetzt)

Wie oben beschrieben kann das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ durch Festlegung von $\mathbb{P}(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$ festgelegt werden. Für das Modell eines unverfälschten Würfels würde man

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) := \frac{1}{|\Omega|} := 1/6 \text{ für alle } \omega \in \Omega \tag{11}$$

wählen. Für ein Modell eines verfälschten Würfels der das Werfen einer Sechs bevorzugt könnte man zum Beispiel definieren, dass

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{8} \text{ für } \omega \in \{1,2,3,4,5\} \text{ und } \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{3}{8}. \tag{12}$$

Im Fall des unverfälschten Würfel ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "Es fällt eine gerade Augenzahl" mit der $\sigma$-Additivät von $\mathbb{P}$ zu

$$\mathbb{P}(\{2,4,6\}) = \mathbb{P}(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}. \tag{13}$$

Im Fall des obigen Modells eines verfälschten Würfels ergibt sich für das gleiche Ereignis die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(\{2,4,6\}) = \mathbb{P}(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \tag{14}$$

# Beispiele

## Gleichzeitiges Würfeln mit einem blauem und einem roten Würfel

Wir wollen nun das gleichzeitige Werfen eines blauen und eines roten Würfels modellieren. Dazu ist es sinnvoll, die Ergebnismenge als

$$\Omega := \{(r,b)|r \in \{1,2,3,4,5,6\}, b \in \{1,2,3,4,5,6\}\} \tag{15}$$

mit Kardinalität $|\Omega| = 36$ zu definieren, wobei $r$ die Augenzahl des blauen Würfels und $b$ die Augenzahl des roten Würfels repräsentieren soll.

Wiederum bietet sich die Wahl der Potenzmenge von $\Omega$ als $\sigma$-Algebra an, wir definieren also wieder $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$. Die Anzahl der in diesem Modell möglichen Ereignisse ergibt sich zu $|\mathcal{A}| = 2^{|\Omega|} = 2^{36} = 68.719.476.736$ In untenstehender Tabelle listen wir sechs dieser Ereignisse in ihrer verbalen Beschreibung und als Teilmenge $A$ von $\Omega$.

Tabelle 2: Ausgewählte Ereignisse beim Modell des Werfens eines roten und eines blauen Würfels

| Beschreibung | Mengenform |
|---|---|
| Auf dem blauen Würfel fällt eine Drei | $\omega \in A = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$ |
| Auf dem roten Würfel fällt eine Drei | $\omega \in A = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3)\}$ |
| Auf beiden Würfeln fällt eine Drei | $\omega \in A = \{(3,3)\}$ |
| Es fällt eine Pasch | $\omega \in A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ |
| Die Summe der gefallenen Zahlen ist Vier | $\omega \in A = \{(1,3),(3,1),(2,2)\}$ |

# Beispiele

## Gleichzeitiges Würfeln mit einem blauen und einem roten Würfel (fortgesetzt)

Die Definition des Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ ist damit abgeschlossen. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ kann wiederum durch Definition von $\mathbb{P}(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$ festgelegt werden. Für das Modell zweier unverfälschter Würfel würde man

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) := \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36} \text{ für alle } \omega \in \Omega \tag{16}$$

wählen. Unter diesem Wahrscheinlichkeitsmaße ergibt sich dann zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "Die Summe der gefallenen Zahlen ist Vier" mit der $\sigma$- Additivät von $\mathbb{P}$ zu

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\{(1,3),(3,1),(2,2)\}\right) &= \mathbb{P}\left(\{(1,3)\} \cup \{(3,1)\} \cup \{(2,2)\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\{(1,3)\}\right) + \mathbb{P}\left(\{(3,1)\}\right) + \mathbb{P}\left(\{(2,2)\}\right) \\
&= 1/36 + 1/36 + 1/36 \\
&= 1/12.
\end{aligned}$$

# Beispiele

## Werfen einer Münze

Wir modellieren das Werfen einer Münze, deren eine Seite Kopf (heads) und deren andere Seite Zahl (tails) zeigt. Es ist sinnvoll, die Ergebnismenge als $\Omega := \{H, T\}$ zu definieren, wobei $H$ "Heads" und $T$ "Tails" repräsentiert. Allerdings wäre auch jede andere binäre Definition von $\Omega$ möglich, z.B. $\Omega := \{0, 1\}, \Omega := \{-1, 1\}$ oder $\Omega := \{1, 2\}$.

Die Potenzmenge $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ enthält alle möglichen Ereignisse. In diesem Fall können wir das gesamte Mengensystem $\mathcal{A}$ sehr leicht komplett auflisten.

Tabelle 3: Ereignissystem $\mathcal{A}$ beim Modell des Werfens einer Münze

| Beschreibung | Mengenform |
|---|---|
| Weder Kopf noch Zahl fällt | $\omega \in A = \emptyset$ |
| Kopf fällt | $\omega \in A = \{H\}$ |
| Zahl fällt | $\omega \in A = \{T\}$ |
| Kopf oder Zahl fällt | $\omega \in A = \{H, T\}$ |

Die Definition des Messraums $(\Omega, \mathcal{A})$ ist damit abgeschlossen.

### Werfen einer Münze (fortgesetzt)

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ kann wiederum durch Definition von $\mathbb{P}(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$ festgelegt werden. Die Normiertheit von $\Omega$ bedingt hier insbesondere, dass

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\{H\}) + \mathbb{P}(\{T\}) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\{T\}) = 1 - \mathbb{P}(\{H\}). \tag{17}$$

Bei Festlegung der Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses $\{H\}$ wird also die Wahrscheinlichkeit des Elementarereignis $\{T\}$ sofort mit festgelegt (andersherum natürlich ebenso). Für das Modell einer fairen Münze würde man $\mathbb{P}(\{H\}) = \mathbb{P}(\{T\}) = 1/2$ wählen. Die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ereignisse ergeben in diesem Fall zu

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\{H\}) = 1/2, \mathbb{P}(\{T\}) = 1/2 \text{ und } \mathbb{P}(\{H, T\}) = 1. \tag{18}$$

## Gleichzeitiges Werfen von zwei Münzen

Wir modellieren das gleichzeitige Werfen zweier Münzen. Basierend auf dem Modell des einfachen Münzwurfs ist es sinnvoll, die Ergebnismenge als $\Omega := \{HH, HT, TH, TT\}$ zu definieren. Die Potenzmenge $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ enthält wiederum alle $2^{|\Omega|} = 2^4 = 16$ möglichen Ereignisse. In untenstehender Tabelle listen wir vier davon.

Tabelle 4: Ausgewählte Ereignisse beim Modell des zweifachen Werfens einer Münze

| Beschreibung | Mengenform |
|---|---|
| Kopf fällt im ersten Wurf | $\omega \in A = \{HH, HT\}$ |
| Kopf fällt im zweiten Wurf | $\omega \in A = \{HH, TH\}$ |
| Kopf fällt nicht | $\omega \in A = \{TT\}$ |
| Zahl fällt mindestens einmal | $\omega \in A = \{HT, TH, TT\}$ |

Die Definition des Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ ist damit abgeschlossen. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ kann wiederum durch Definition von $\mathbb{P}(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$ festgelegt werden. Für das Modell zweier fairer Münzen könnte man etwa

$$\mathbb{P}(\{HH\}) = \mathbb{P}(\{HT\}) = \mathbb{P}(\{TH\}) = \mathbb{P}(\{TT\}) = \frac{1}{4} \tag{19}$$

wählen.

Definition

Erste Eigenschaften

Wahrscheinlichkeitsfunktionen

Beispiele

**Selbstkontrollfragen**

# Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie Sinn und Zweck der Wahrscheinlichkeitstheorie.
2. Erläutern Sie den Begriff des Zufallsvorgangs.
3. Definieren Sie den Begriff der $\sigma$-Algebra.
4. Definieren Sie den Begriff des Wahrscheinlichkeitsmaßes.
5. Definieren Sie den Begriff des Wahrscheinlichkeitsraums.
6. Erläutern Sie den Begriff der Ergebnismenge $\Omega$.
7. Erläutern Sie den Begriff eines Ereignisses $A \in \mathcal{A}$.
8. Erläutern Sie den Begriff des Ereignissystems $\mathcal{A}$.
9. Erläutern Sie den Begriff des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$.
10. Erläutern Sie die stillschweigende Mechanik des Wahrscheinlichkeitsraummodells.
11. Welche $\sigma$-Algebra wählt man sinnvoller Weise für ein Wahrscheinlichkeitsraum mit endlicher Ergebnismenge?
12. Definieren Sie den Begriff der Wahrscheinlichkeitsfunktion.
13. Warum ist der Begriff der Wahrscheinlichkeitsfunktion bei der Modellierung eines Zufallsvorgans durch einen Wahrscheinlichkeitsraums mit endlicher Ergebnismenge hilfreich?
14. Erläutern Sie die Modellierung des Werfens eines Würfels mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums.
15. Erläutern Sie die Modellierung des gleichzeitigen Werfens eines roten und eines blauen Würfels mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums.
16. Erläutern Sie die Modellierung des Werfens einer Münze mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums.
17. Erläutern Sie die Modellierung des gleichzeitigen Werfens zweier Münzen mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums.

# References

Kolmogoroff, A. 1933. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-49888-6.