Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2021/22

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(11) Konfidenzintervalle

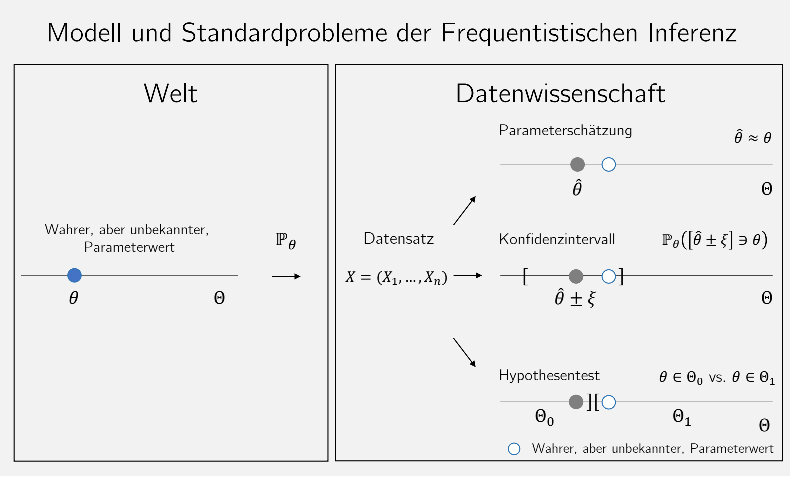
Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

Datum	Einheit	Thema
14.10.2021	Einführung	(1) Einführung
21.10.2021	Wahrscheinlichkeitstheorie	(2) Wahrscheinlichkeitsräume
28.10.2021	Wahrscheinlichkeitstheorie	(3) Elementare Wahrscheinlichkeiten
04.11.2021	Wahrscheinlichkeitstheorie	(4) Zufallsvariablen
11.11.2021	Wahrscheinlichkeitstheorie	(5) Multivariate Verteilungen
18.11.2021	Wahrscheinlichkeitstheorie	(6) Erwartungswert, Varianz, Kovarianz
25.11.2021	Wahrscheinlichkeitstheorie	(7) Ungleichungen und Grenzwerte
02.12.2021	Wahrscheinlichkeitstheorie	(8) Transformationen der Normalverteilung
09.12.2021	Frequentistische Inferenz	(9) Grundbegriffe Frequentistischer Inferenz
16.12.2021	Frequentistische Inferenz	(10) Parameterschätzung
	Weihnachtspause	
13.01.2022	Frequentistische Inferenz	(11) Konfidenzintervalle
20.01.2022	Frequentistische Inferenz	(12) Hypothesentests | Frage-Anwtort-Session
27.01.2022	Frequentistische Inferenz	Frage-Antwort-Session
31.01.2022	Klausur	16 - 17 Uhr, G44 - H6
Jul 2022	Klausurwiederholungstermin	

(12) Hypothesentests ist als Online Vorlesung verfügbar, der Termin dient als Frage-Antwort-Session.

(13) Einstichproben-T-Tests ist als **nicht klausurrelevante** Online Vorlesung verfügbar.

(14) Zweistichproben-T-Tests ist als **nicht klausurrelevante** Online Vorlesung verfügbar.


Modell und Standardprobleme der Frequentistischen Inferenz
Welt
Wahrer, aber unbekannter, Parameterwert
θ
Θ
$\mathbb{P}_\theta$
Datenwissenschaft
Datensatz
$X = (X_1, \ldots, X_n)$
Parameterschätzung
$\hat{\theta} \approx \theta$
$\hat{\theta}$
Θ
Konfidenzintervall
$\mathbb{P}_\theta([\hat{\theta} \pm \xi] \ni \theta)$
$\hat{\theta} \pm \xi$
Θ
Hypothesentest
$\theta \in \Theta_0$ vs. $\theta \in \Theta_1$
Θ_0
Θ_1
Θ
Wahrer, aber unbekannter, Parameterwert

Standardprobleme Frequentistischer Inferenz

(1) **Parameterschätzung**

Ziel der Parameterschätzung ist es, einen möglichst guten Tipp für den wahren, aber unbekannten, Parameterwert (oder eine Funktion dessen) abzugeben, typischerweise basierend auf der Beobachtung einer Realisierung von $X_1, ..., X_n \sim p_\theta$.

(2) **Konfidenzintervalle**

Das Ziel der Bestimmung von Konfidenzintervallen ist es, basierend auf der Verteilung möglicher Parameterschätzwerte eine quantitative Aussage über die mit dem Schätzwert assoziierte Unsicherheit zu treffen.

(3) **Hypothesentests**

Das Ziel der Auswertung von Hypothesentests ist es, basierend auf der angenommenen Verteilung der Beobachtungen $X_1, ..., X_n$ in einer möglichst sinnvollen Form zu entscheiden, ob der wahre, aber unbekannte Parameterwert, in einer von zwei sich gegenseitig ausschließenden Untermengen des Parameterraumes, welche man als Hypothesen bezeichnet, liegt.

Standardannahmen Frequentistischer Inferenz

$\mathcal{M}$ sei ein statistisches Modell mit $X_1, ..., X_n \sim \mathbb{P}_\theta$. Es wird angenommen, dass ein vorliegender Datensatz eine der möglichen Realisierungen von $X_1, ..., X_n \sim \mathbb{P}_\theta$ ist. Aus frequentistischer Sicht kann man die Erhebung von Datensätzen unendlich oft wiederholen und zu jedem Datensatz Statistiken auswerten.

Datensatz (1) : $x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}\right)$, Statistik (1): $S : \mathbb{R}^n \to \Sigma, x^{(1)} \mapsto S\left(x^{(1)}\right)$

Datensatz (2) : $x^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(2)}\right)$, Statistik (2): $S : \mathbb{R}^n \to \Sigma, x^{(2)} \mapsto S\left(x^{(2)}\right)$

Datensatz (3) : $x^{(3)} = \left(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, ..., x_n^{(3)}\right)$, Statistik (3): $S : \mathbb{R}^n \to \Sigma, x^{(3)} \mapsto S\left(x^{(3)}\right)$

Datensatz (4) : $x^{(4)} = \left(x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, ..., x_n^{(4)}\right)$, Statistik (4): $S : \mathbb{R}^n \to \Sigma, x^{(4)} \mapsto S\left(x^{(4)}\right)$

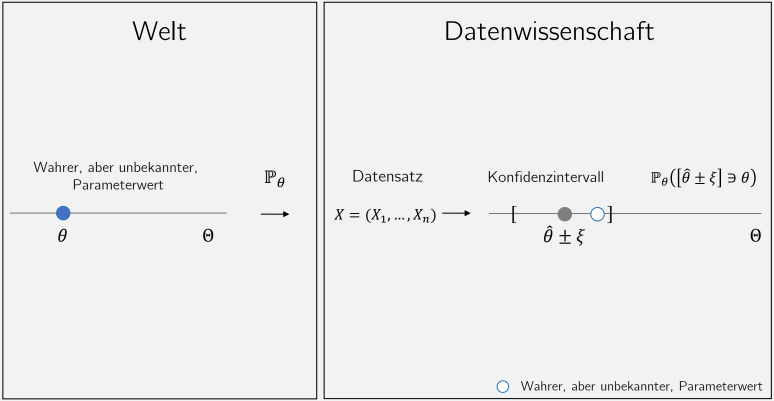
...

Um die Qualität statistischer Methoden zu beurteilen betrachtet die frequentistische Statistik deshalb die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Statistiken und Schätzern unter der Annahme von $X_1, ..., X_n \sim p_\theta$.

Wenn eine statistische Methode im Sinne der frequentitischen Standardannahmen “gut” ist, dann heißt das also, dass sie bei häufiger Anwendung “im Mittel gut” ist. Im Einzelfall, also im realen Normalfall nur eines vorliegenden Datensatzes, kann sie auch “schlecht” sein.

Modell und Standardprobleme Frequentistischer Inferenz

Modell und Standardprobleme der Frequentistischen Inferenz



Definition

Beispiele

Selbstkontrollfragen

Appendix

Definition

Beispiele

Selbstkontrollfragen

Appendix

Definition (δ-Konfidenzintervall)

Es sei $X = X_1, ..., X_n \sim p_\theta$ eine Stichprobe, $\delta \in]0,1[$, und $G_u(X)$ und $G_o(X)$ seien zwei Statistiken. Dann ist ein δ-*Konfidenzintervall* ein Interval der Form $K_n := [G_u, G_o]$, so dass

$$\mathbb{P}_\theta (K_n \ni \theta) = \mathbb{P}_\theta (G_u(X) \le \theta \le G_o(X)) = \delta \text{ für alle } \theta \in \Theta \text{ gilt.} \tag{1}$$

δ heißt das *Konfidenzniveau* oder die *Überdeckungswahrscheinlichkeit* des Konfidenzintervalls. Die Statistiken $G_u(X)$ und $G_o(X)$ sind die unteren und oberen Grenzen des Konfidenzintervalls.

Bemerkungen

- θ ist fest, nicht zufällig, und unbekannt.
- K_n ist ein zufälliges Intervall, weil $G_u(X)$ und $G_o(X)$ Zufallsvariablen sind.
- $K_n \ni \theta$ bedeutet $\theta \in K_n$, aber K_n ist zufällig und steht deshalb vorn (cf. $\mathbb{P}(X = x)$).
- Ein δ-Konfidenzintervall überdeckt den wahren Wert θ mit Wahrscheinlichkeit δ.
- Oft wird $\delta = 0.95$ gewählt, also 95%-*Konfidenzintervalle* betrachtet.

Definition

Zwei Interpretationen von δ-Konfidenzintervallen

(1) Wird ein Zufallsvorgang unter gleichen Umständen häufig wiederholt, so überdeckt das zugehörige δ-Konfidenzintervall den wahren, aber unbekannten Parameterwert in $\delta \cdot 100\%$ der Fälle. Technischer ausgedrückt, für unabhängig gezogene Stichproben einer Verteilung mit wahrem, aber unbekannten, Parameter θ überdeckt ein entsprechendes δ- Konfidenzintervall θ in $\delta \cdot 100\%$ aller Fälle.

(2) Man betrachte eine Folge von Zufallsvorgängen mit wahren, aber unbekannten, Parametern $\theta_1, \theta_2, ...$ und stelle sich vor δ-Konfidenzintervalle f ür eben jene von Folge von wahren, aber unbekannten Parametern $\theta_1, \theta_2, ...$ zu konstruieren. Dann überdecken $\delta \cdot 100\%$ der Konfidenzintervalle den wahren, aber unbekannten, Wert $\theta_i, i = 1, 2, ...$

Definition (Pivot)

Ein *Pivot* ist eine Funktion einer Stichprobe $X_1, ..., X_n$ (also eine Statistik) und eines wahren, aber unbekannten, Parameters θ, deren Verteilung nicht von θ abhängt.

Bemerkung

- Ein Pivot ist eine Statistik, die vom wahren, aber unbekannten Parameter θ abhängt, deren Verteilung aber nicht von vom wahren, aber unbekannten Parameter θ abhängt. Mithilfe von Pivots kann man Konfidenzintervalle für alle Werte von θ konstruieren.

Definition

Allgemeine Konstruktion von Konfidenzintervallen

(1) Definition des statistischen Modells

(2) Definition der Konfidenzintervallstatistik

(3) Analyse der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik

(4) Etablierung der Konfidenzbedingung

(5) Definition des Konfidenzintervalls

Beispiele

(1) Erwartungswertparameter bei Normalverteilung mit bekannter Varianz

(2) Varianzparameter bei Normalverteilung

(3) Erwartungswertparamter bei Normalverteilung mit unbekannter Varianz

Allgemeine Konstruktion von Konfidenzintervallen

(1) Definition des statistischen Modells

(2) Definition der Konfidenzintervallstatistik

(3) Analyse der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik

(4) Etablierung der Konfidenzbedingung

(5) Definition des Konfidenzintervalls

Beispiele

(1) **Erwartungswertparameter bei Normalverteilung mit bekannter Varianz**

(2) Varianzparameter bei Normalverteilung

(3) Erwartungswertparamter bei Normalverteilung mit unbekannter Varianz

(1) Definition des statistischen Modells

Es sei $X_1, ..., X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ eine Stichprobe, wobei μ unbekannt sei und $\sigma^2 > 0$ bekannt sei. Wir entwickeln ein δ-Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter μ.

(2) Definition der Statistik

Wir betrachten die *Z-Konfidenzintervallstatistik*

$$Z := \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\bar{X}_n - \mu\right) \text{ mit } \bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{2}$$

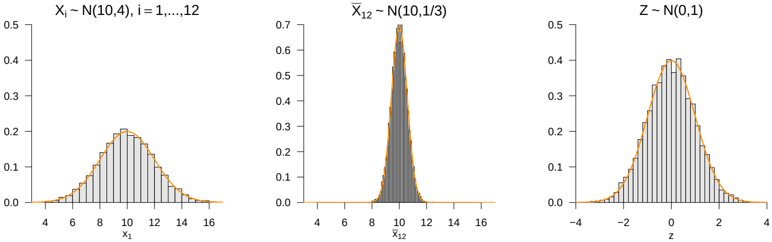
(3) Analyse der Verteilung der Statistik

Für die Z-Konfindenzintervallstatistik gilt $Z \sim N(0,1)$. Für einen Beweis verweisen wir auf den Appendix. Die Z-Konfindenzintervallstatistik ist eine Funktion der Stichprobe $X_1, ..., X_n$ (via $\bar{X}_n$) und μ, während ihre Verteilung also nicht von μ abhängt. Die Z-Konfindenzintervallstatistik ist damit ein exaktes Pivot. Wir erinnern daran, dass wir die WDF einer Z-Zufallsvariable mit ϕ, die KVF einer Z-Zufallsvariable mit Φ und die inverse KVF einer Z-Zufallsvariable mit Φ^{-1} bezeichnen.

(3) Analyse der Verteilung der Statistik (fortgeführt)

```
# Modellformulierung
mu      = 10                                        # w.a.u. Erwartungswertparameter
sigsqr  = 4                                           # wahrer bekannter Varianzparameter
n       = 12                                          # Stichprobengroesse
ns      = 1e4                                         # Anzahl Stichprobenrealisierungen
res     = 1e3                                         # Ausgangsraumaufloesung

# analytische Definitionen und Resultate
x_i     = seq(3,17,len = res)                         # x_1 Raum
x_bar   = seq(3,17,len = res)                         # x_bar Raum
z       = seq(-4,4,len = res)                         # z Raum
p_x_i   = dnorm(x_i,mu,sqrt(sigsqr))                  # x_1 WDF
p_x_bar = dnorm(x_bar,mu,sqrt(sigsqr/n))              # x_bar WDF
p_z     = dnorm(z,0,1)                                # z WDF

# Simulation
X_i     = rep(NaN,ns)                                 # X_i Array
X_bar   = rep(NaN,ns)                                 # \bar{X}_{12} Array
Z       = rep(NaN,ns)                                 # Z Array

for(s in 1:ns){                                       # Simulationsiterationen
  X          = rnorm(n,mu,sqrt(sigsqr))               # Stichprobenrealisierung
  X_i[s]     = X[1]                                   # X_i
  X_bar[s]   = mean(X)                                # Stichprobenmittelrealisierung

  # Z-Statistik Realisation
  Z[s]       = sqrt(n)*((X_bar[s] - mu)/sqrt(sigsqr))
}
```

(3) Analyse der Verteilung der Statistik (fortgeführt)

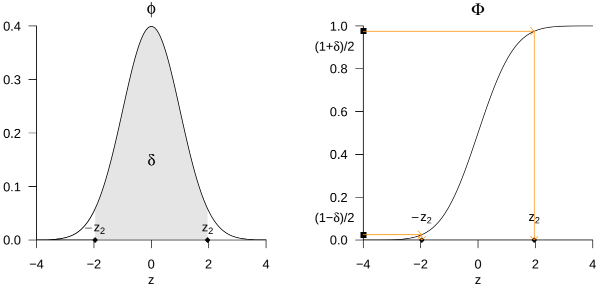


(4) Etablierung der Konfidenzbedingung

Für $\delta \in]0,1[$, seien

$$z_1 := \Phi^{-1}\left(\frac{1-\delta}{2}\right) \text{ und } z_2 := \Phi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}\right) \tag{3}$$

Es gilt dann $(1+\delta)/2 - (1-\delta)/2 = \delta$ und zum Beispiel gilt für $\delta = 0.95$, dass $z_1 = \Phi^{-1}(0.025) = -1.96$ und $z_2 = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$. Weiterhin gilt mit der Symmetrie von $N(0,1)$, dass $z_1 = -z_2$. Es gilt hier also per Definition $\mathbb{P}(-z_2 \leq Z \leq z_2) = \delta$.



(4) Etablierung der Konfidenzbedingung (fortgeführt)

Mit der Definition von z_2 wie oben folgt dann aber

$$
\begin{aligned}
\delta &= \mathbb{P}\left(-z_2 \leq Z \leq z_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-z_2 \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu) \leq z_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2 \leq \bar{X}_n - \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2 \leq -\mu \leq -\bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2 \geq \mu \geq \bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2 \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2, \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2\right] \ni \mu\right).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Wir können nun das gesuchte Konfidenzintervall definieren.

(5) Definition des Konfidenzintervalls

Es sei $X_1, ..., X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ eine Stichprobe bei bekanntem Varianzparameter σ^2 und unbekanntem Erwartungswertparameter μ, es sei $\delta \in]0,1[$ und es sei $z_\delta := \Phi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}\right)$. Definiere

$$K_n := \left[\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\delta, \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\delta\right]. \tag{5}$$

Dann gilt wie oben gezeigt, dass

$$\mathbb{P}(K_n \ni \mu) = \delta. \tag{6}$$

Damit ist K_n ein δ-Konfidenzintervall für μ. Man beachte, dass K_n ein zufälliges Intervall ist, weil $\bar{X}_n$ eine Zufallsvariable ist.

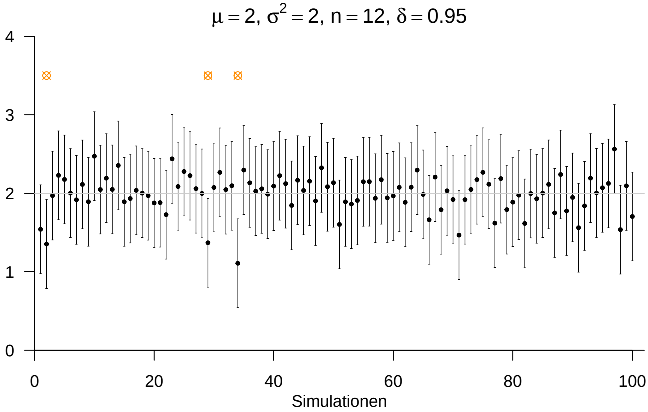
(5) Definition des Konfidenzintervalls (fortgeführt)

Simulation

```
# Modellformulierung
mu      = 2                                          # w.a.u. Erwartungswertparameter
sigsqr  = 1                                          # w.a.u. Varianzparameter
sigma   = sqrt(sigsqr)                               # w.a.u. St.Abweichungsparameter
n       = 12                                         # Stichprobengroesse
delta   = 0.95                                       # Konfidenzbedingung
phi_inv = qnorm((1+delta)/2)                         #\Phi^{-1}((\delta + 1)/2)

# Simulation
ns      = 1e2                                        # Anzahl Simulationen
X_bar   = rep(NaN,ns)                                # Stichprobenmittelarray
C       = matrix(rep(NaN,2*ns), ncol = 2)            # Konfidenzintervallarray
for(i in 1:ns){
   X        = rnorm(n,mu,sigma)                      # Stichprobenrealisierung
   X_bar[i] = mean(X)                                # Stichprobenmittel
   C[i,1]   = X_bar[i] - (sigma/sqrt(n))*phi_inv     # untere KI Grenze
   C[i,2]   = X_bar[i] + (sigma/sqrt(n))*phi_inv       # obere  KI Grenze
}
```

(5) Definition des Konfidenzintervalls (fortgeführt)

Simulation



Allgemeine Konstruktion von Konfidenzintervallen

(1) Definition des statistischen Modells
(2) Definition der Konfidenzintervallstatistik
(3) Analyse der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik
(4) Etablierung der Konfidenzbedingung
(5) Definition des Konfidenzintervalls

Beispiele

(1) Erwartungswertparameter bei Normalverteilung mit bekannter Varianz
(2) **Varianzparameter bei Normalverteilung**
(3) Erwartungswertparamter bei Normalverteilung mit unbekannter Varianz

(1) Definition des statistischen Modells

Es sei $X_1, ..., X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ eine Stichprobe mit unbekanntem Varianzparameter $\sigma^2 > 0$ und bekanntem oder unbekanntem Erwartungswertparameter μ. Wir entwickeln ein δ-Konfidenzintervall für den Varianzparameter σ^2.

(2) Definition der Statistik

Wir betrachten die U-Konfidenzintervallstatistik

$$U := \frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \text{ mit } S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2 . \tag{7}$$

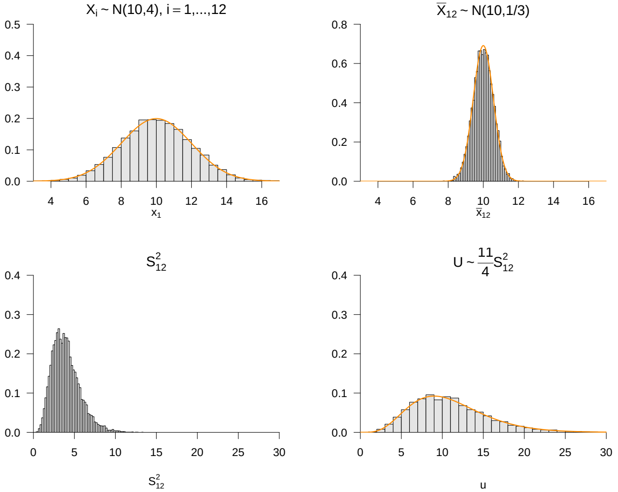
(3) Analyse der Verteilung der Statistik

Für die U-Konfidenzintervallstatistik gilt $U \sim \chi^2(n-1)$. Für einen Beweis dieser Tatsache verweisen wir auf Casella and Berger (2012), Abschnitt 5.3. Die U-Konfidenzintervallstatistik ist eine Funktion von $X_1, ..., X_n$ (via S_n^2) und σ^2, während ihre Verteilung nicht von σ^2 abhängt. Die U-Konfidenzintervallstatistik ist also ein exaktes Pivot. Wir erinnern daran, dass wir WDF einer χ^2-verteilten Zufallvariable mit χ^2, die KVF einer χ^2-verteilten Zufallvariable mit Ξ und die inverse KVF einer χ^2-verteilten Zufallvariable mit Ξ^{-1} bezeichnen.

(3) Analyse der Verteilung der Statistik (fortgeführt)

```
# Modellformulierung
mu      = 10                                  # wahrer Erwartungswertparameter
sigsqr  = 4                                   # wahrer bekannter Varianzparameter
n       = 12                                  # Stichprobengroesse
ns      = 1e4                                 # Anzahl Stichprobenrealisierungen
res     = 1e3                                 # Ausgangsraumaufloesung

# analytische Definitionen und Resultate
x_i     = seq(3,17,len = res)                 # x_1 Raum
x_bar   = seq(3,17,len = res)                 # x_bar Raum
u       = seq(0,30,len = res)                 # normalisierte S_n^2 Raum
p_x_i   = dnorm(x_i,mu,sqrt(sigsqr))          # x_1 WDF
p_x_bar = dnorm(x_bar,mu,sqrt(sigsqr/n))      # x_bar WDF
p_u     = dchisq(u,n-1)                       # u WDF

# Simulation
X_i     = rep(NaN,ns)                         # X_1 Array
X_bar   = rep(NaN,ns)                         # \bar{X} Array
S_sqr   = rep(NaN,ns)                         # S^2 Array
U       = rep(NaN,ns)                         # U Array

for(s in 1:ns){                               # Simulationsiterationen
  X         = rnorm(n,mu,sqrt(sigsqr))        # Stichprobenrealisierung
  X_i[s]    = X[1]                            # X_i
  X_bar[s]  = mean(X)                         # Stichprobenmittelrealisierung
  S_sqr[s]  = var(X)                          # Stichprobenvarianzrealisierung

  # U-Statistik Realisiation
  U[s]      = ((n-1)/sigsqr)*S_sqr[s]
}
```

(3) Analyse der Verteilung der Statistik (fortgeführt)

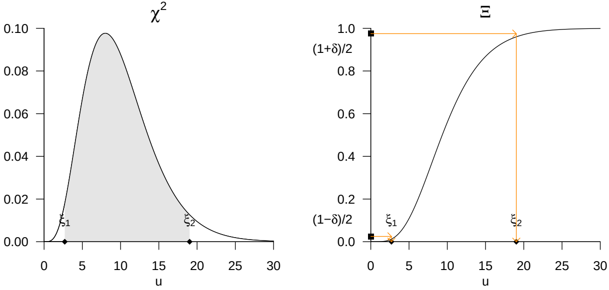


(4) Etablierung der Konfidenzbedingung

Für $\delta \in]0,1[$ seien

$$\xi_1 := \Xi^{2^{-1}}\left(\frac{1-\delta}{2}; n-1\right) \text{ und } \xi_2 := \Xi^{2^{-1}}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right) \tag{8}$$

Es gilt dann $(1+\delta)/2 - (1-\delta)/2 = \delta$ gilt und zum Beispiel gilt für $n = 10$ und $\delta = 0.95$, $\xi_1 := \Xi^{2^{-1}}(0.025; 9) = 2.70$ und $\xi_2 := \Xi^{2^{-1}}(0.975; 9) = 19.0$. Es gilt hier also per Definition $\mathbb{P}(\xi_1 \le U \le \xi_2) = \delta$.



(4) Etablierung der Konfidenzbedingung (fortgeführt)

Mit der Definition von ξ_1 und ξ_2 wie oben folgt dann aber

$$
\begin{aligned}
\delta &= \mathbb{P}\left(\xi_1 \le U \le \xi_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\xi_1 \le \frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \le \xi_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\xi_1^{-1} \ge \frac{\sigma^2}{(n-1)S_n^2} \ge \xi_2^{-1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\xi_1} \ge \sigma^2 \ge \frac{(n-1)S_n^2}{\xi_2}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\xi_2} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S_n^2)}{\xi_1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\frac{(n-1)S_n^2}{\xi_2}, \frac{(n-1)S_n^2)}{\xi_1}\right] \ni \sigma^2\right).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Wir können nun das gesuchte Konfidenzintervall definieren.

(5) Definition des Konfidenzintervalls

Es sei $X_1, ..., X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ eine Stichprobe mit unbekanntem Varianzparameter σ^2 und bekanntem oder unbekanntem Erwartungswertparamter μ, und es seien weiterhin $\delta \in]0,1[$, $\xi_1 := \Xi^{2^{-1}}\left(\frac{1-\delta}{2}; n-1\right)$ und $\xi_2 := \Xi^{2^{-1}}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right)$. Definiere

$$K_n := \left[\frac{(n-1)S_n^2}{\xi_2}, \frac{(n-1)S_n^2}{\xi_1}\right]. \tag{10}$$

Dann gilt wie oben gezeigt

$$\mathbb{P}(K_n \ni \sigma^2) = \delta. \tag{11}$$

Damit ist K_n ein δ-Konfidenzintervall für σ^2. Man beachte, dass K_n ein zufälliges Intervall ist, weil S_n^2 eine Zufallsvariable ist.

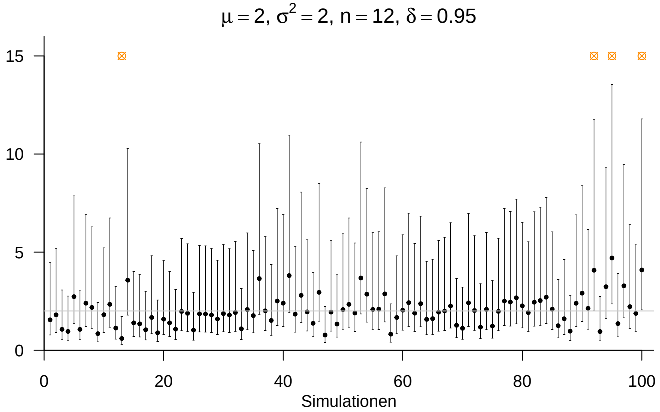
(5) Definition des Konfidenzintervalls (fortgeführt)

Simulation

```
# Modellformulierung
mu       = 2                                    # w.a.u. Erwartungswertparameter
sigsqr   = 2                                    # w.a.u. Varianzparameter
n        = 12                                   # Stichprobengroesse
delta    = 0.95                                 # Konfidenzbedingung
xi_1     = qchisq((1-delta)/2, n - 1)           # \Xi^2((1-\delta)/2; n - 1)
xi_2     = qchisq((1+delta)/2, n - 1)           # \Xi^2((1+\delta)/2; n - 1)

# Simulation
ns       = 1e2                                  # Anzahl Simulationen
X_bar    = rep(NaN,ns)                          # Stichprobenmittelarray
S2       = rep(NaN,ns)                          # Stichprobenvarianzarray
C        = matrix(rep(NaN,2*ns), ncol = 2)      # Konfidenzintervallarray
for(i in 1:ns){                                 # Simulationsiterationen
   X        = rnorm(n,mu,sqrt(sigsqr))          # Stichprobenrealisierung
   S2[i]    = var(X)                            # Stichprobenvarianz
   C[i,1]   = (n-1)*S2[i]/xi_2                  # untere KI Grenze
   C[i,2]   = (n-1)*S2[i]/xi_1                  # obere KI Grenze
}
```

(5) Definition des Konfidenzintervalls (fortgeführt)

Simulation



Allgemeine Konstruktion von Konfidenzintervallen

(1) Definition des statistischen Modells

(2) Definition der Konfidenzintervallstatistik

(3) Analyse der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik

(4) Etablierung der Konfidenzbedingung

(5) Definition des Konfidenzintervalls

Beispiele

(1) Erwartungswertparameter bei Normalverteilung mit bekannter Varianz

(2) Varianzparameter bei Normalverteilung

(3) **Erwartungswertparamter bei Normalverteilung mit unbekannter Varianz**

(1) Definition des statistischen Modells

Es sei $X_1, ..., X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ eine Stichprobe, wobei μ und $\sigma^2 > 0$ unbekannt seien. Wir entwickeln ein δ-Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter μ.

(2) Definition der Statistik

Wir betrachten die T-Konfidenzintervallstatistik

$$T := \frac{\sqrt{n}}{S_n}(\bar{X}_n - \mu) \text{ mit } \bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \text{ und } S_n := \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}. \qquad (12)$$

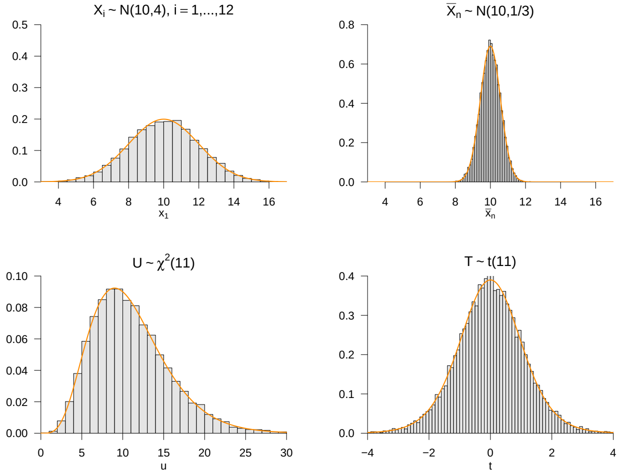
(3) Analyse der Verteilung der Statistik

Für die T-Konfidenzintervallstatistik gilt $T \sim t(n-1)$, die T-Konfidenzintervallstatistik ist also eine t-verteilte Zufallsvariable mit Freiheitsgradparameter $n-1$. Für einen Beweis verweisen wir auf den Appendix. Die T-Konfidenzintervallstatistik ist eine Funktion der Stichprobe $X_1, ..., X_n$ (via $\bar{X}_n$ und S_n), während ihre Verteilung also weder von μ noch von σ^2 abhängt. Die T-Konfidenzintervallstatistik ist also ein exaktes Pivot. Wir erinnern daran, dass wir die WDF einer t-verteilten Zufallvariable mit t, die KVF einer t-verteilten Zufallvariable mit ψ und die inverse KFV einer t-verteilten Zufallvariable mit ψ^{-1} bezeichnen.

(3) Analyse der Verteilung der Statistik (fortgeführt)

```r
# Modellformulierung
mu      = 10                                # w.a.u. Erwartungswertparameter
sigsqr  = 4                                 # wahrer bekannter Varianzparameter
n       = 12                                # Stichprobengroesse
ns      = 1e4                               # Anzahl Stichprobenrealisierungen
res     = 1e3                               # Ausgangsraumaufloesung

# analytische Definitionen und Resultate
x_i     = seq(3,17,len = res)               # x_1 Raum
x_bar   = seq(3,17,len = res)               # x_bar Raum
u       = seq(0,30,len = res)               # normalisierte s_{12}^2 Raum
t       = seq(-4,4,len = res)               # t Raum
p_x_i   = dnorm(x_i,mu,sqrt(sigsqr))        # x_1 WDF
p_x_bar = dnorm(x_bar,mu,sqrt(sigsqr/n))    # x_bar WDF
p_u     = dchisq(u,n-1)                     # u WDF
p_t     = dt(t,n-1)                         # t WDF

# Simulation
X_i     = rep(NaN,ns)                       # X_1 Array
X_bar   = rep(NaN,ns)                       # \bar{X} Array
U       = rep(NaN,ns)                       # U Array
Tee     = rep(NaN,ns)                       # T Array
for(s in 1:ns){                                 # Simulationsiterationen
  X         = rnorm(n,mu,sqrt(sigsqr))      # Stichprobenrealisierung
  X_i[s]    = X[1]                          # X_i
  X_bar[s]  = mean(X)                       # Stichprobenmittelrealisierung
  U[s]      = (n-1)/(sigsqr)*var(X)         # U Statistik Realisierung

  # T-Statistik Realisierung
  Tee[s]    = sqrt(n)*((X_bar[s] - mu)/sqrt(var(X)))
}
```

(3) Analyse der Verteilung der Statistik (fortgeführt)

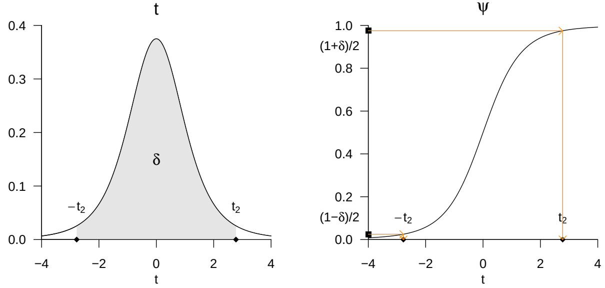


(4) Etablierung der Konfidenzbedingung

Für $\delta \in]0,1[$ seien

$$t_1 := \psi^{-1}\left(\frac{1-\delta}{2}; n-1\right) \text{ und } t_2 := \psi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right) \tag{13}$$

Es gilt dann $(1+\delta)/2 - (1-\delta)/2 = \delta$ und zum Beispiel gilt für $n = 5$ und $\delta = 0.95$, $t_1 = \psi^{-1}(0.025; 4) = -2.57$ und $t_2 = \psi^{-1}(0.975; 4) = 2.57$. Weiterhin gilt mit der Symmetrie von $t(n-1)$, $t_1 = -t_2$. Es gilt hier also per Definition $\mathbb{P}(-t_2 \le T \le t_2) = \delta$.



(4) Etablierung der Konfidenzbedingung (fortgeführt)

Mit der definition von t_2 wie oben folgt dann aber

$$
\begin{aligned}
\delta &= \mathbb{P}\left(-t_2 \le T \le t_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-t_2 \le \frac{\sqrt{n}}{S_n}(\bar{X}_n - \mu) \le t_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2 \le \bar{X}_n - \mu \le \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2 \le -\mu \le -\bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2 \ge \mu \ge \bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2 \le \mu \le \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2, \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2\right] \ni \mu\right).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Wir können nun das gesuchte Konfidenzintervall definieren.

(5) Definition des Konfidenzintervalls

Es sei $X_1, ..., X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit unbekannten Parametern μ und σ^2, es sei $\delta \in]0,1[$, und es sei $t_\delta := \psi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right)$. Definiere

$$K_n := \left[\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_\delta, \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_\delta\right]. \quad (15)$$

Dann gilt wie oben gezeigt

$$\mathbb{P}(K_n \ni \mu) = \delta. \quad (16)$$

Damit ist K_n ein δ-Konfidenzintervall für μ. Man beachte, dass K_n ein zufälliges Intervall ist, weil $\bar{X}_n$ und S_n Zufallsvariablen sind.

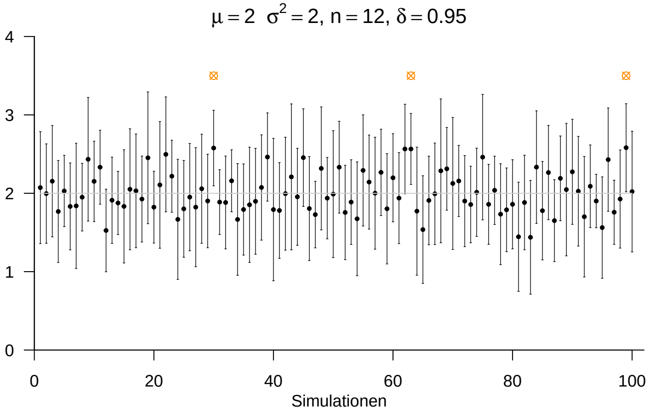
(5) Definition des Konfidenzintervalls (fortgeführt)

Simulation

```
# Modellformulierung
mu      = 2                                    # w.a.u. Erwartungswertparameter
sigsqr  = 1                                    # w.a.u. Varianzparameter
sigma   = sqrt(sigsqr)                         # w.a.u. St.Abweichungsparameter
n       = 12                                   # Stichprobengroesse
delta   = 0.95                                 # Konfidenzbedingung
psi_inv = qt((1+delta)/2,n-1)                  # \psi^-1((\delta + 1)/2, n-1)

# Simulation
ns      = 1e2                                  # Anzahl Simulationen
X_bar   = rep(NaN,ns)                          # Stichprobenmittelarray
S       = rep(NaN,ns)                          # St.Abweichungsarray
C       = matrix(rep(NaN,2*ns), ncol = 2)      # Konfidenzintervallarray
for(i in 1:ns){
   X        = rnorm(n,mu,sigma)                # Stichprobenrealisierung
   X_bar[i] = mean(X)                          # Stichprobenmittel
   S[i]     = sd(X)                            # Stichprobenstandardabweichung
   C[i,1]   = X_bar[i] - (S[i]/sqrt(n))*psi_inv # untere KI Grenze
   C[i,2]   = X_bar[i] + (S[i]/sqrt(n))*psi_inv # obere KI Grenze
}
```

(5) Definition des Konfidenzintervalls (fortgeführt)

Simulation



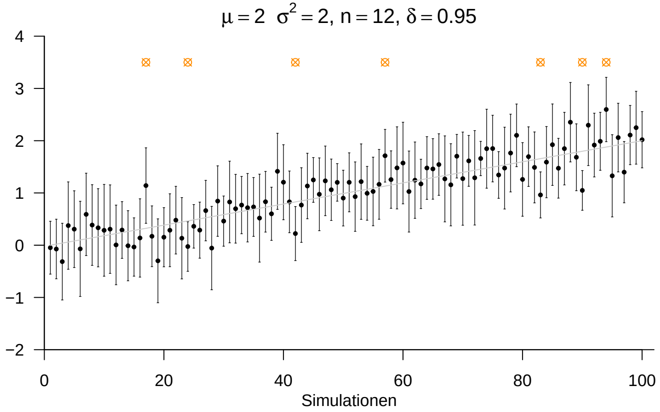
(5) Definition des Konfidenzintervalls (fortgeführt)

Simulation der zweiten Interpretation eines Konfidenzintervalls

```
# Anzahl Simulationen mit \theta_1, \theta_2,...
ns      = 1e2                                        # Anzahl Simulationen

# Modellformulierung
mu      = 2 * seq(0,1,len = ns)                      # w.a.u. Erwartungswertparameter
sigsqr  = 1                                          # w.a.u. Varianzparameter
sigma   = sqrt(sigsqr)                               # w.a.u. St.Abweichungsparameter
n       = 12                                         # Stichprobengroesse
delta   = 0.95                                       # Konfidenzbedingung
psi_inv = qt((1+delta)/2,n-1)                        # \psi^-1((\delta + 1)/2, n-1)

# Simulation

X_bar   = rep(NaN,ns)                                # Stichprobenmittelarray
S       = rep(NaN,ns)                                # St.Abweichungsarray
C       = matrix(rep(NaN,2*ns), ncol = 2)            # Konfidenzintervallarray
for(i in 1:ns){
   X        = rnorm(n,mu[i],sigma)                   # Stichprobenrealisierung
   X_bar[i] = mean(X)                                # Stichprobenmittel
   S[i]     = sd(X)                                  # Stichprobenstandardabweichung
   C[i,1]   = X_bar[i] - (S[i]/sqrt(n))*psi_inv     # untere KI Grenze
   C[i,2]   = X_bar[i] + (S[i]/sqrt(n))*psi_inv     # obere KI Grenze
}
```

(5) Definition des Konfidenzintervalls (fortgeführt)

Simulation der zweiten Interpretation eines Konfidenzintervalls



Definition

Beispiele

Selbstkontrollfragen

Appendix

Definition

Beispiele

Selbstkontrollfragen

Appendix

Selbstkontrollfragen

1. Definieren Sie den Begriff des δ-Konfidenzintervalls (δ-KIs).
2. Geben Sie zwei Interpretationen eines δ-KIs.
3. Erläutern Sie die typischen Schritte zur Konstruktion eines δ-KIs.
4. Definieren Sie die Z-Konfidenzintervallstatistik und geben Sie ihre Verteilung an.
5. Geben Sie das δ-KI für den Erwartungswert einer Normalverteilung bei bekannter Varianz an.
6. Definieren Sie die U-Statistik und geben Sie ihre Verteilung an.
7. Geben Sie das δ-KI für den Varianzparameter einer Normalverteilung an.
8. Definieren Sie die T-Konfidenzintervallstatistik und geben Sie ihre Verteilung an.
9. Geben Sie das δ-KI für den Erwartungswert einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz an.

Definition

Beispiele

Selbstkontrollfragen

Appendix

Appendix

Beweis der Verteilung der Z-Konfidenzintervallstatistik

Wir halten zunächst fest, dass mit der Mittelwertstransformation für unabhängig und identisch normalverteilte Zufallsvariablen gilt, dass $\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ (cf. (7) Transformationen der Normalverteilungen). Die Verteilung der Z-Konfidenzintervallsstatistik folgt dann mit dem WDF Transformationstheorem bei linear-affinen Abbildungen (cf. ibid.) durch Transformation von $\bar{X}_n$ mit der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \bar{x}_n \mapsto f(\bar{x}_n) := \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\bar{x}_n - \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\mu \tag{17}$$

Für die WDF von Z gilt also

$$\begin{aligned}
p_Z(z) &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} N\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(z + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\mu\right); \mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{n}}} \exp\left(-\frac{1}{2\frac{\sigma^2}{n}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(z + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\mu\right) - \mu\right)^2\right) \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{n}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z + \mu - \mu\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) \\
&= N(z; 0, 1)
\end{aligned} \tag{18}$$

$\square$

Beweis der Verteilung der T-Konfidenzintervallstatistik

Wir halten zunächst fest, dass

$$T = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n}\right) = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sigma}\,\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n/\sigma} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2}S_n^2}} \tag{19}$$

An der rechten Seite obiger Gleichung sehen wir also, dass die T-Konfidenzintervallstatistik als Quotient der Zufallsvariablen

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu) \text{ und } \sqrt{\frac{1}{\sigma^2}S_n^2} \tag{20}$$

geschrieben werden kann. Dabei hat die Zufallsvariable im Zähler die Form der Z-Konfidenzintervallstatistik, kann also als

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu) =: Z \tag{21}$$

geschrieben werden. Die Zufallsvariable im Nenner dagegen hat die Form der Quadratwurzel einer mit $n-1$ multiplizierten U-Konfidenzintervallstatistik, kann also als

$$\sqrt{\frac{1}{\sigma^2}S_n^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\,\frac{n-1}{\sigma^2}S_n^2} := \sqrt{\frac{1}{n-1}U} \tag{22}$$

geschrieben werden.

Beweis der Verteilung der T-Konfidenzintervallstatistik (fortgeführt)

Insgesamt kann die T Konfidenzintervallstatistik also als

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{n-1}}} \text{ mit } Z \sim N(0,1) \text{ und } U \sim \chi^2(n-1) \tag{23}$$

geschrieben werden. Casella and Berger (2012) zeigen in Abschnitt 5.3, dass die Zufallsvariablen im Zähler und Nenner dieser Formulierung der T-Konfidenzintervallstatistik unabhängig sind.

Es ergibt sich also, dass die T-Konfidenzintervallstatistik als Quotient zweier unabhängiger Zufallsvariablen geschrieben werden kann, wobei die Zählerzufallsvariable eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist und die Nennerzufallsvariable die Quadratwurzel einer durch die Anzahl ihrer Freiheitsgrade geteilten χ^2-verteilten Zufallsvariable ist.

Dann aber folgt mit dem T-Transformationstheorem (cf. (8) Transformationen der Normalverteilung), dass die T-Konfidenzintervallstatistik eine t-verteilte Zufallsvariable mit Freiheitsgradparameter entsprechend dem Freiheitsgradparamter der χ^2-verteilten Zufallsvariable, hier also $n-1$, ist. Es folgt demnach $T \sim t(n-1)$.

$\square$

References

Casella, G, and R Berger. 2012. *Statistical Inference*. Duxbury.