



# Programmierung und Deskriptive Statistik

BSc Psychologie WiSe 2021/22

Prof. Dr. Dirk Ostwald

## (11) Anwendungsbeispiel

---

Beispieldatensatz

Visualisierung

Deskriptive Statistiken

Parameterschätzung

Konfidenzintervalle

Hypothesentests

## Evidenzbasierte Evaluation von Psychotherapieformen bei Depression

Welche Therapieform ist bei Depression wirksamer?

### Online Psychotherapie



### Klassische Psychotherapie



# Beispieldatensatz

## Evidenzbasierte Evaluation von Psychotherapieformen bei Depression

### Becks Depressions-Inventar (BDI) zur Depressionsdiagnostik

BDI-II		Fragebogen	
Name	Wohnort	Datum	Blatt
		01.12.20	1
<p><b>Anleitung:</b> Dieser Fragebogen enthält 21 Gruppen von Aussagen. Bitte lesen Sie jede Gruppe dieser Aussagen sorgfältig durch und wählen Sie sich dann in jeder Gruppe eine Aussage heraus, die am besten beschreibt, wie Sie sich in der letzten zwei Wochen, einschließlich heute, gefühlt haben. Kennen Sie die Zahl neben der Aussage an, die Sie sich herausgehört haben (0, 1, 2 oder 3). Falls in einer Gruppe mehrere Aussagen gleichwertig sind für zuzählen, können Sie für Aussage mit der höchsten Zahl an. Achten Sie bitte darauf, dass Sie in jeder Gruppe nicht mehr als eine Aussage ankreuzen, die gilt auch für Gruppe II (Veränderungen der Schlafgewohnheiten) oder Gruppe 16 (Veränderungen des Appetits).</p>			
<p><b>1.) Traurigkeit</b></p> <p>0 Ich bin nicht traurig. 1 Ich bin oft traurig. 2 Ich bin ständig traurig. 3 Ich bin so traurig oder unglücklich, dass ich es nicht aushalte.</p> <p><b>2.) pessimismus</b></p> <p>0 Ich sehe nicht mal in die Zukunft. 1 Ich sehe mittelmäßig in die Zukunft als optimistisch. 2 Ich bin müde und erwarte nicht, dass meine Situation besser wird. 3 Ich glaube, dass meine Zukunft hoffnungslos ist und nur noch schlechter wird.</p> <p><b>3.) Versagensgefühle</b></p> <p>0 Ich fühle mich nicht als Versager. 1 Ich habe häufiger Versagensgefühle. 2 Wenn ich zurückblicke, sehe ich eine Menge Fehlertage. 3 Ich habe das Gefühl, ich mache ein völliger Versager zu sein.</p> <p><b>4.) Verlust von Freude</b></p> <p>0 Ich kann die Dinge genauso gut genießen wie früher. 1 Ich kann die Dinge nicht mehr so genießen wie früher. 2 Dinge, die mir früher Freude gemacht haben, kann ich kaum mehr genießen. 3 Dinge, die mir früher Freude gemacht haben, kann ich überhaupt nicht mehr genießen.</p> <p><b>5.) Schuldgefühle</b></p> <p>0 Ich habe keine besonderen Schuldgefühle. 1 Ich habe oft Schuldgefühle wegen Dingen, die ich getan habe oder hätte tun sollen. 2 Ich habe die meisten Zeit Schuldgefühle. 3 Ich habe ständig Schuldgefühle.</p>	<p><b>6.) Bestrafungsgefühle</b></p> <p>0 Ich habe keine das Gefühl, für etwas bestraft zu sein. 1 Ich habe das Gefühl, vielleicht bestraft zu werden. 2 Ich erwarte, bestraft zu werden. 3 Ich habe das Gefühl, bestraft zu sein.</p> <p><b>7.) Selbsthöhnung</b></p> <p>0 Ich habe von mir genauso viel wie immer. 1 Ich habe Vertrauen in mich verloren. 2 Ich bin von mir enttäuscht. 3 Ich lehne mich völlig ab.</p> <p><b>8.) Selbstvorwürfe</b></p> <p>0 Ich kritisiere oder tadle mich nicht mehr als sonst. 1 Ich bin mir gegenüber kritischer als sonst. 2 Ich kritisiere mich für all meine Mängel. 3 Ich gebe mir die Schuld für alles Schlechte, was passiert.</p> <p><b>9.) Selbstmordgedanken</b></p> <p>0 Ich denke nicht daran, mir etwas anzutun. 1 Ich denke manchmal an Selbstmord, aber ich würde es nicht tun. 2 Ich möchte mich ein bisschen verletzen, um etwas mich umzubringen, wenn ich die Gelegenheit dazu hätte. 3 Ich würde mich umbringen, wenn ich die Gelegenheit dazu hätte.</p> <p><b>10.) Weinen</b></p> <p>0 Ich weine nicht öfter als früher. 1 Ich weine jetzt mehr als früher. 2 Ich weine beim geringsten Anlass. 3 Ich möchte gar weinen, aber ich kann nicht.</p>		

<p><b>11.) Unruhe</b></p> <p>0 Ich bin nicht unruhiger als sonst. 1 Ich bin unruhiger als sonst. 2 Ich bin so unruhig, dass es mir schwerfällt, still zu sitzen. 3 Ich bin so unruhig, dass ich mich ständig bewegen oder etwas tun muss.</p> <p><b>12.) Interessensverlust</b></p> <p>0 Ich habe das Interesse an anderen Menschen oder an Tätigkeiten nicht verloren. 1 Ich habe weniger Interesse an anderen Menschen oder an Dingen als sonst. 2 Ich habe das Interesse an anderen Menschen oder Dingen zum größten Teil verloren. 3 Es fällt mir schwer, mich überhaupt für irgend etwas zu interessieren.</p> <p><b>13.) Entschlussunfähigkeit</b></p> <p>0 Ich bin so entscheidungsfreudig wie immer. 1 Es fällt mir schwerer als sonst, Entscheidungen zu treffen. 2 Es fällt mir sehr viel schwerer als sonst, Entscheidungen zu treffen. 3 Ich habe Mühe, überhaupt Entscheidungen zu treffen.</p> <p><b>14.) Wertlosigkeit</b></p> <p>0 Ich fühle mich nicht wertlos. 1 Ich habe mich für weniger wertvoll und nützlich als sonst. 2 Vergleichlich mit anderen Menschen fühle ich mich viel weniger wert. 3 Ich fühle mich völlig wertlos.</p> <p><b>15.) Energieverlust</b></p> <p>0 Ich habe so viel Energie wie immer. 1 Ich habe weniger Energie als sonst. 2 Ich habe so wenig Energie, dass ich kaum noch etwas schaffe. 3 Ich habe keine Energie mehr, um überhaupt noch etwas zu tun.</p> <p><b>16.) Veränderungen der Schlafgewohnheiten</b></p> <p>0 Meine Schlafgewohnheiten haben sich nicht verändert. 1 Ich schlafe etwas mehr als sonst. 2 Ich schlafe etwas weniger als sonst. 3 Ich schlafe viel mehr als sonst. 4 Ich schlafe viel weniger als sonst. 5 Ich schlafe fast den ganzen Tag. 6 Ich wache 1-2 Stunden früher auf als gewöhnlich und kann dann nicht mehr einschlafen.</p>	<p><b>17.) Reizbarkeit</b></p> <p>0 Ich bin nicht reizbarer als sonst. 1 Ich bin reizbarer als sonst. 2 Ich bin viel reizbarer als sonst. 3 Ich fühle mich dauernd gereizt.</p> <p><b>18.) Veränderungen des Appetits</b></p> <p>0 Mein Appetit hat sich nicht verändert. 1 Mein Appetit ist etwas schlechter als sonst. 2 Mein Appetit ist etwas größer als sonst. 3 Mein Appetit ist viel schlechter als sonst. 4 Mein Appetit ist viel größer als sonst. 5 Ich habe überhaupt keinen Appetit. 6 Ich habe ständig Heißhunger.</p> <p><b>19.) Konzentrationschwierigkeiten</b></p> <p>0 Ich kann mich so gut konzentrieren wie immer. 1 Ich kann mich nicht mehr so gut konzentrieren wie sonst. 2 Es fällt mir schwer, mich längere Zeit auf irgend etwas zu konzentrieren. 3 Ich kann mich überhaupt nicht mehr konzentrieren.</p> <p><b>20.) Ermüdung oder Erschöpfung</b></p> <p>0 Ich fühle mich nicht müde oder erschöpfter als sonst. 1 Ich werde schneller müde oder erschöpfter als sonst. 2 Für viele Dinge, die ich üblicherweise tue, bin ich zu müde oder erschöpft. 3 Ich bin so müde oder erschöpft, dass ich fast nichts mehr tun kann.</p> <p><b>21.) Verlust an sexuellem Interesse</b></p> <p>0 Mein Interesse an Sexualität hat sich in letzter Zeit verändert. 1 Ich interessiere mich weniger für Sexualität als früher. 2 Ich interessiere mich jetzt viel weniger für Sexualität. 3 Ich habe das Interesse an Sexualität völlig verloren.</p>
<p>Summe Punkte 1:</p> <p>Übertrag Seite 1:</p>	<p>Summe Punkte 2:</p> <p>Summe Punkte 3-6:</p>

0 - 8 keine Depression

9 - 13 minimale Depression

14 - 19 leichte Depression

20 - 28 mittelschwere Depression

29 - 63 schwere Depression

## Beispiel: Evaluation von Psychotherapieformen bei Depression

Experimentelle Bedingung  
(Gruppen von  $n = 50$ )

Psychotherapie

Klassisch

Pre-BDI



Post-BDI

Online

Pre-BDI



Post-BDI

## Einlesen des Datensatzes mit `read.table()`

```
fname = file.path(getwd(), "11_Daten", "psychotherapie_datensatz.csv")  
D = read.table(fname, sep = ",", header = TRUE)
```

Daten der ersten acht Proband:innen jeder Gruppe

	Bedingung	Pre.BDI	Post.BDI
1	Klassisch	17	9
2	Klassisch	20	14
3	Klassisch	16	13
4	Klassisch	18	12
5	Klassisch	21	12
6	Klassisch	17	14
7	Klassisch	17	12
8	Klassisch	17	9
51	Online	22	16
52	Online	19	15
53	Online	21	13
54	Online	18	15
55	Online	19	13
56	Online	17	16
57	Online	20	13
58	Online	19	16

## Datensatzübersicht mit View()



The image shows a screenshot of a data table viewer. At the top, there is a header bar with a grid icon, a close button 'D x', and a search bar containing the word 'Filter'. Below the header, the table has three columns: 'Bedingung', 'Pre BDI', and 'Post BDI'. The 'Bedingung' column contains 16 rows of the word 'Klassisch'. The 'Pre BDI' column contains numerical values ranging from 16 to 21, and the 'Post BDI' column contains numerical values ranging from 9 to 15. Each row is numbered from 1 to 16.

	Bedingung	Pre BDI	Post BDI
1	Klassisch	17	9
2	Klassisch	20	14
3	Klassisch	16	13
4	Klassisch	18	12
5	Klassisch	21	12
6	Klassisch	17	14
7	Klassisch	17	12
8	Klassisch	17	9
9	Klassisch	18	11
10	Klassisch	18	14
11	Klassisch	20	10
12	Klassisch	17	15
13	Klassisch	16	17
14	Klassisch	18	12
15	Klassisch	16	10
16	Klassisch	18	13



## Datenvorverarbeitung

- Studienfokus ist die **Veränderung** der Depressionsymptomatik durch Therapieformen.
- Für jede Proband:in der ergibt sich diese Veränderung als **Differenz** von Post.BDI - Pre.BDI.
- Eine Reduktion der Depressionssymptomatik ergibt dabei eine **negative Zahl**.
- Es ist sinnvoller, Verbesserungen mit **positiven Zahlen** zu repräsentieren.
- Als Maß des Therapieeffekts bei Proband:in  $i$  bietet sich also an

$$\Delta\text{BDI}[i] := -(\text{Post.BDI}[i] - \text{Pre.BDI}[i]) \quad (1)$$

- Wir betrachten in der Folge also das  $\Delta\text{BDI}$  Maß mit folgender Interpretation

$\Delta\text{BDI} > 0$	Verminderung der Depressionsymptomatik	Wirksame Therapie
$\Delta\text{BDI} = 0$	Keine Veränderung der Depressionsymptomatik	Wirkungslose Therapie
$\Delta\text{BDI} < 0$	Verstärkung der Depressionsymptomatik	Schädigende Therapie

## Datenvorverarbeitung

Hinzufügen einer  $\Delta$ BDI Spalte zum Dataframe

```
fname      = file.path(getwd(), "11_Daten", "psychotherapie_datensatz.csv") # Einlesen
D          = read.table(fname, sep = ",", header = TRUE)                  # Rohdaten
D$Delta.BDI = -(D$Post.BDI - D$Pre.BDI)                                  # \Delta BDI Maß
```

Daten der ersten acht Proband:innen jeder Gruppe

	Bedingung	Pre.BDI	Post.BDI	Delta.BDI
1	Klassisch	17	9	8
2	Klassisch	20	14	6
3	Klassisch	16	13	3
4	Klassisch	18	12	6
5	Klassisch	21	12	9
6	Klassisch	17	14	3
7	Klassisch	17	12	5
8	Klassisch	17	9	8
51	Online	22	16	6
52	Online	19	15	4
53	Online	21	13	8
54	Online	18	15	3
55	Online	19	13	6
56	Online	17	16	1
57	Online	20	13	7
58	Online	19	16	3

---

Beispieldatensatz

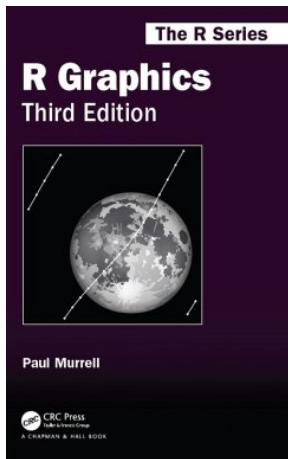
## **Visualisierung**

Deskriptive Statistiken

Parameterschätzung

Konfidenzintervalle

Hypothesentest



## R Funktionalitäten für Abbildungen

### Base Graphics

- Erstellung und bedarfsgerechte Anpassung von Abbildungen
- Eher low-level, fine tuning orientiert

### Lattice und ggplot2

- Erstellung und bedarfsgerechte Anpassung von Abbildungen
- Eher high level, an der eigenen Philosophie orientiert

Base Graphics, lattice und ggplot2 können ähnliche Abbildungen generieren

LaTeX Typesetting ist in allen Paketen unterentwickelt

## R Funktionalitäten für Abbildungen

### **Base Graphics**

- **Erstellung und bedarfsgerechte Anpassung von Abbildungen**
- **Eher low-level, fine tuning orientiert**

### Lattice und ggplot2

- Erstellung und bedarfsgerechte Anpassung von Abbildungen
- Eher high level, an der eigenen Philosophie orientiert

Base Graphics, lattice und ggplot2 können ähnliche Abbildungen generieren

LaTeX Typesetting ist in allen Paketen unterentwickelt

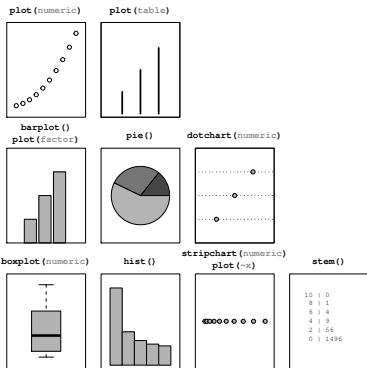


Figure 2.5

High-level base graphics plotting functions for producing plots of a single variable. Where the function can be used to produce more than one type of plot, the relevant data type is shown (in gray). For example, `plot(numeric)` means that this is what the `plot()` produces when it is given a single numeric argument.

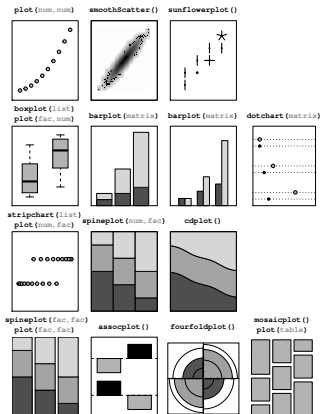
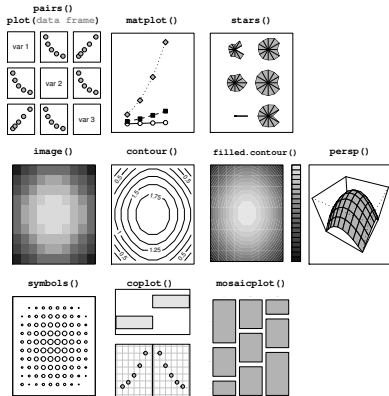


Figure 2.6

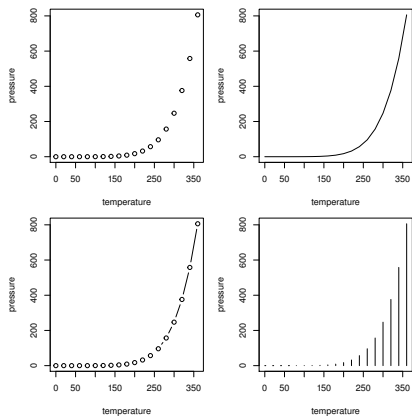
High-level base graphics plotting functions for producing plots of two variables. Where the function can be used to produce more than one type of plot, the relevant data type is shown (in gray). For example `plot(num, fac)` represents calling the `plot()` function with a numeric vector as the first argument and a factor as the second argument.





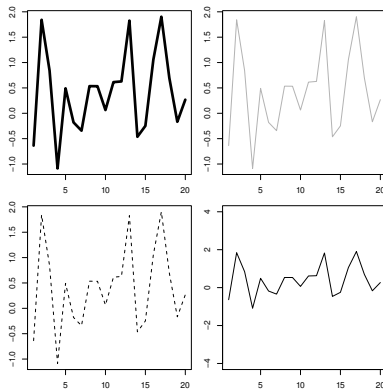
**Figure 2.7**

High-level base graphics plotting functions for producing plots of many variables. Where the function can be used to produce more than one type of plot, the relevant data type is shown (in gray).



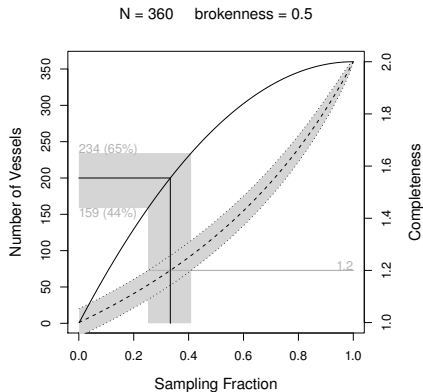
**Figure 2.2**

Four variations on a scatterplot. In each case, the plot is produced by a call to the `plot()` function with the same data; all that changes is the value of the `type` argument. At top-left, `type="p"` to give points (data symbols), at top-right, `type="l"` to give lines, at bottom-left, `type="b"` to give both, and at bottom-right, `type="h"` to give histogram-like vertical lines.



**Figure 2.9**

Standard arguments for high-level functions. All four plots are produced by calls to the `plot()` function with the same data, but with different standard plot function arguments specified: the top-left plot makes use of the `lwd` argument to control line thickness; the top-right plot uses the `col` argument to control line color; the bottom-left plot makes use of the `lty` argument to control line type; and the bottom-right plot uses the `ylim` argument to control the scale on the y-axis.



**Figure 1.3**

A customized scatterplot produced using R. This is created by starting with a simple scatterplot and augmenting it by adding an additional y-axis and several additional sets of lines, polygons, and text labels.

Murrell (2019)

## Code Outline

```
# Initialisierung einer neuen Abbildung
dev.new()

# Abbildungsparameter
par(
z.B. Arrangement von Panels, Begrenzungsstile, Schriftfonts, etc
)

# Higher-level Abbildungsfunktion wie plot(), hist(), barplot(), ...
plot(
z.B. x- und y-Daten, Achsenlimits, Achsenbeschriftungen, Titel, Farben, etc.
Jeder Aufruf einer higher-level Graphikfunktion belegt ein neues Subpanel!
)

# Hinzufügen weiterer Daten mit lower-level Abbildungsfunktionen zum aktuellen Panel
z.B. points(), lines(), abline()

# Weitere Graphikannotation zu aktuellem Panel
z.B. legend(), text()

# Speichern der Abbildung (Größenverhältnisse erst hier final festgelegt)
z.B. dev.copy2pdf()
```

## Histogramme

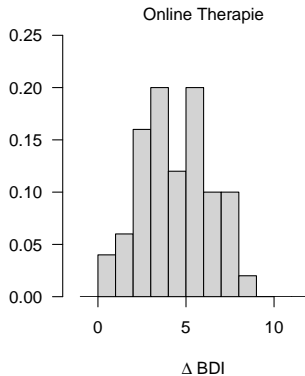
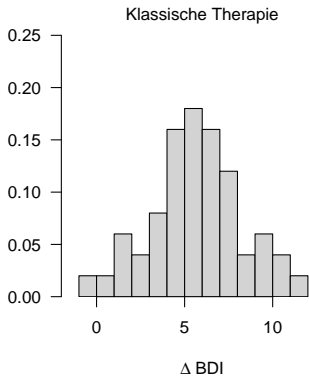
```
# Histogrammparameter
h          = 1 # gewünschte Klassenbreite
b_0       = min(D$Delta.BDI) # b_0
b_k       = max(D$Delta.BDI) # b_0
k         = ceiling((b_k - b_0)/h) # Anzahl der Klassen
b         = seq(b_0, b_k, by = h) # Klassen [b_{j-1}, b_j[
ylimits   = c(0, 25) # y-Achsenlimits
xlimits   = c(-2, 14) # x-Achsenlimits
therapie  = c("Klassisch", "Online") # Therapiebedingungen
labs      = c("Klassische Therapie", # Abbildungslabel
             "Online Therapie")

# Abbildungsparameter
par( # für Details siehe ?par
mfcol   = c(1,2), # 1 x 2 Panelstruktur
family  = "sans", # Serif-freier Fonttyp
pty     = "m", # Maximale Abbildungsregion
bty     = "l", # L förmige Box
las     = 1, # Horizontale Achsenbeschriftung
xaxs    = "i", # x-Achse bei y = 0
yaxs    = "i", # y-Achse bei x = 0
font.main = 1, # Non-Bold Titel
cex     = 1, # Textvergrößerungsfaktor
cex.main = 1) # Titeltextvergrößerungsfaktor

# Iteration über Therapiebedingungen
for(i in 1:2){
  hist(
    D$Delta.BDI[D$Bedingung == therapie[i]], # Delta.BDI Werte von Therapiebedingung i
    breaks = b, # Histogrammklassen
    freq = F, # normierte relative Häufigkeit
    xlim = xlimits, # x-Achsenlimits
    ylim = ylimits, # y-Achsenlimits
    xlab = TeX("$\\Delta$ BDI"), # x-Achsenbeschriftung
    ylab = "", # y-Achsenbeschriftung
    main = labs[i]) # Titelbeschriftung
}

# PDF Speicherung
dev.copy2pdf(
file = file.path(getwd(), "11_Abbildungen", "pds_11_histogramm.pdf"),
width = 8,
height = 4)
```

## Histogramme



---

Beispieldatensatz

Visualisierung

**Deskriptive Statistiken**

Parameterschätzung

Konfidenzintervalle

Hypothesentest



## Bedingungsabhängige Auswertung deskriptiver Statistiken

```
# Initialisierung eines Dataframes
tp      = c("Klassisch", "Online")           # Therapiebedingungen
ntp     = length(tp)                       # Anzahl Therapiebedingungen
S       = data.frame(                      # Dataframeerzeugung
  n      = rep(NA,n,tp),                   # Stichprobengrößen
  Max    = rep(NA,n,tp),                   # Maxima
  Min    = rep(NA,n,tp),                   # Minima
  Median = rep(NA,n,tp),                   # Mediane
  Mean   = rep(NA,n,tp),                   # Mittelwerte
  Var    = rep(NA,n,tp),                   # Varianzen
  Std    = rep(NA,n,tp),                   # Standardabweichungen
  row.names = tp)                          # Therapiebedingungen

# Iterationen über Therapiebedingungen
for(i in 1:ntp){
  data      = D$Delta.BDI[D$Bedingung == tp[i]] # Daten
  S$n[i]    = length(data)                   # Stichprobengröße
  S$Max[i]  = max(data)                      # Maxima
  S$Min[i]  = min(data)                      # Minima
  S$Median[i] = median(data)                 # Mediane
  S$Mean[i] = mean(data)                    # Mittelwerte
  S$Var[i]  = var(data)                     # Varianzen
  S$Std[i]  = sd(data)                      # Standardabweichungen
}
```

## Bedingungsabhängige Auswertung deskriptiver Statistiken

```
# Ausgabe
```

```
print.AsIs(S)
```

```
>           n Max Min Median Mean  Var  Std
> Klassisch 50 12 -1     6 6.16 7.08 2.66
> Online    50  9  1     5 4.92 3.91 1.98
```

- Die Anzahl der Proband:innen in beiden Therapiegruppen ist gleich.
- Die Spannweite der  $\Delta$ BDI Daten ist in der klassischen Therapieform leicht erhöht.
- Median und Mittelwert nehmen für die klassische Therapieform leicht höhere Werte an.
- Ein  $\Delta$ BDI Mittelwertsunterschied von 1 ist klinisch wohl eher vernachlässigbar.
- Median und Mittelwert sind in beiden Therapieformen ähnlich (unimodale Verteilung).
- Die Variabilitätsmaße zeigen eine etwas erhöhte Variabilität in der klassischen Therapieform.

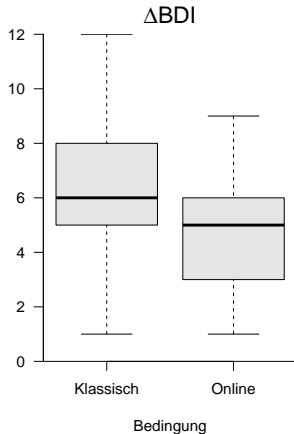
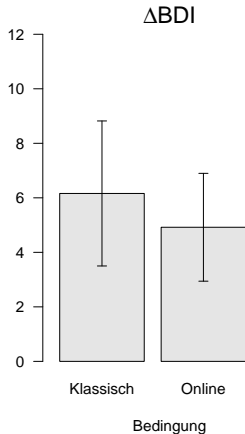
## Bedingungsabhängige Visualisierung deskriptiver Statistiken

```
# Abbildungsparameter
par(
  mfcol      = c(1,2),          # für Details siehe ?par
  family     = "sans",        # 1 x 2 Panelstruktur
  pty       = "m",            # Serif-freier Fonttyp
  bty       = "l",            # Maximale Abbildungsregion
  las       = 1,              # L förmige Box
  xaxs      = "i",            # Horizontale Achsenbeschriftung
  yaxs      = "i",            # x-Achse bei y = 0
  font.main  = 1,             # y-Achse bei x = 0
  cex       = 1,              # Non-Bold Titel
  cex.main   = 1.5)           # Textvergrößerungsfaktor
                                # Titeltextvergrößerungsfaktor

# Linkes Panel: Balkendiagramm mit Fehlerbalken
mw      = S$Mean              # Gruppenmittelwert
sd      = S$Std               # Gruppenstandardabweichung
names(mw) = tp                # barplot braucht x-Werte als names
x = barplot(
  mw,
  col      = "gray90",        # Ausgabe der x-Ordinaten (?barplot für Details)
  ylim     = c(0,12),         # Mittelwerte = Balkenhöhe
  xlim     = c(0,3),          # Balkenfarbe
  xlab     = "Bedingung",     # y-Achsenbegrenzung
  main     = TeX("$\\Delta$ BDI$"), # x-Achsenbegrenzung
  arrows() # Titel
                                # x-Achsenbeschriftung
                                # Titel
                                # arrows() für Fehlerbalken (siehe ?arrows)
                                # arrow start x-ordinate
                                # arrow start y-ordinate
                                # arrow end x-ordinate
                                # arrow end y-ordinate
                                # Pfeilspitzen beiderseits
                                # Pfeilspitzenwinkel -> Linie
                                # Linielänge
  x0      = x,
  y0      = mw - sd,
  x1      = x,
  y1      = mw + sd,
  code    = 3,
  angle   = 90,
  length  = 0.05)

# Rechtes Panel: Boxplot
boxplot(
  D$Delta.BDI ~ D$Bedingung,   # Gruppierung der Delta.BDI Daten nach D$Bedingung
  ylim     = c(0,12),          # y-Achsenbegrenzung
  col      = "gray90",        # Boxfarbe
  ylab     = "",               # y-Achsenbeschriftung
  xlab     = "Bedingung",     # x-Achsenbeschriftung
  main     = TeX("$\\Delta$ BDI$")) # Titel
```

## Bedingungsabhängige Visualisierung deskriptiver Statistiken



---

Beispieldatensatz

Visualisierung

Deskriptive Statistiken

**Parameterschätzung**

Konfidenzintervalle

Hypothesentests

## Modellannahmen für Parameterschätzung und Konfidenzintervalle

Motiviert durch die therapieabhängige Visualisierung der  $\Delta$ BDI Daten und unseren wissenschaftssoziologischen Kontext legen wir nun das Normalverteilungsmodell zugrunde.

Wir nehmen also an, dass die  $\Delta$  BDI Werte Realisierungen von unabhängig verteilten Zufallsvariablen

$$X_{ij} \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right), i = 1, 2, j = 1, \dots, 50 \quad (2)$$

sind, wobei  $i$  die Therapiebedingung (1 = Klassisch, 2 = Online) und  $j$  den Proband:innen Index in der  $i$ ten experimentellen Bedingung bezeichnen. Innerhalb einer Bedingung sind diese Zufallsvariablen also unabhängig und identisch verteilt.

Dies entspricht der Annahme, dass sich der  $\Delta$ BDI Wert einer Proband:in durch Addition einer normalverteilten Fehlervariable mit Erwartungswertparameter 0 und Varianzparameter  $\sigma_i^2$  zu den innerhalb einer Therapiebedingung identischen Wert  $\mu_i$  ergibt.

# Parameterschätzung

Zur Parameterschätzung im vorliegenden Modell nutzen wir

- den Maximum Likelihood Schätzer für  $\mu_i$
- den Varianzschätzer für  $\sigma^2$

```
# Initialisierung eines Dataframes
tp           = c("Klassisch", "Online")
ntp         = length(tp)
S           = data.frame(
  mu_ML      = rep(NA,ntp),
  sigsqr_VAR = rep(NA,ntp))

# Iterationen über Therapiebedingungen
for(i in 1:ntp){
  data      = D$Delta.BDI[D$Bedingung == tp[i]]
  S$mu_ML[i] = mean(data)
  S$sigsqr_VAR[i] = var(data)
}

# Ausgabe
print.AsIs(S)
```

```
> mu_ML sigsqr_VAR
> 1 6.16      7.08
> 2 4.92      3.91
```

Tipps für  $\mu_i$  und  $\sigma_i^2$  auf Grundlage dieser unverzerrten Schätzer sind also

$$\hat{\mu}_1 = 6.16, \quad \hat{\mu}_2 = 4.92, \quad \hat{\sigma}_1^2 = 7.08, \quad \hat{\sigma}_2^2 = 3.91. \quad (3)$$

Die mit diesen Tipps assoziierte Unsicherheit ist hier nicht angegeben.

---

Beispieldatensatz

Visualisierung

Deskriptive Statistiken

Parameterschätzung

**Konfidenzintervalle**

Hypothesentest



# Konfidenzintervalle

## Konfidenzintervalle für die Erwartungswertparameterschätzer

```
# Analyseparameter
t      = c("Klassisch", "Online")
ntp    = length(tp)
n      = 50
C      = data.frame(
  G_u   = rep(NA,n,tp),
  mu_hat = rep(NA,n,tp),
  G_o   = rep(NA,n,tp),
  row.names = tp)

# Therapiebedingungen
# Anzahl an Therapiebedingungen
# Anzahl von Beobachtungen pro Therapiebedingung
# Dataframeerzeugung
# untere KI Grenze
# Erwartungswertparameterschätzer
# obere KI Grenze
# Therapiebedingungen

# Konfidenzintervallparameter
delta  = 0.95
psi_inv = qt((1+delta)/2,n-1)

# Konfidenzintervallevaluation
for(i in 1:ntp){
  data      = D$Delta.BDI[D$Bedingung == t[i]]
  X_bar     = mean(data)
  S         = sd(data)
  C$G_u[i]  = X_bar - (S/sqrt(n))*psi_inv
  C$mu_hat[i] = X_bar
  C$G_o[i]  = X_bar + (S/sqrt(n))*psi_inv
}

# Ausgabe
print.AsIs(C)
```

```
>           G_u mu_hat G_o
> Klassisch 5.40  6.16 6.92
> Online    4.36  4.92 5.48
```

## Konfidenzintervalle für die Varianzparameterschätzer

```
# Analyseparameter
t      = c("Klassisch", "Online")
ntp    = length(tp)
n      = 50
C      = data.frame(
  G_u   = rep(NaN,ntp),
  sigsq_r_hat = rep(NaN,ntp),
  G_o   = rep(NaN,ntp),
  row.names = tp)

# Therapiebedingungen
# Anzahl an Therapiebedingungen
# Anzahl von Beobachtungen pro Therapiebedingung
# Dataframeerzeugung
# untere KI Grenze
# Varianzparameterschätzer
# obere KI Grenze
# Therapiebedingungen

# Konfidenzintervallparameter
delta  = 0.95
xi_1   = qchisq((1-delta)/2, n - 1)
xi_2   = qchisq((1+delta)/2, n - 1)

# Konfidenzintervallevaluation
for(i in 1:ntp){
  data      = D$Delta.BDI[D$Bedingung == t[i]] # Stichprobenrealisierung
  S2        = var(data)                       # Stichprobenvarianz
  C$G_u[i]  = (n-1)*S2/xi_2                    # untere KI Grenze
  C$sigsqr_hat[i] = S2                        # Varianzparameterschätzer
  C$G_o[i]  = (n-1)*S2/xi_1                    # obere KI Grenze
}

# Ausgabe
print.AsIs(C)
```

```
>           G_u sigsq_r_hat  G_o
> Klassisch 4.94         7.08 10.99
> Online    2.73         3.91  6.07
```

---

Beispieldatensatz

Visualisierung

Deskriptive Statistiken

Parameterschätzung

Konfidenzintervalle

**Hypothesentest**

## Anwendungsszenario, Modellannahmen und Hypothese

Es liegen zwei Stichproben experimenteller Einheiten (Klassische Bedingung, Online Bedingung) vor. Wir nehmen unabhängige identische Normalverteilungen  $N(\mu_1, \sigma^2)$  und  $N(\mu_2, \sigma^2)$  an, wobei die Parameter  $\mu_1, \mu_2, \sigma^2$  unbekannt sind. Wir beabsichtigen das Quantifizieren der Unsicherheit beim inferentiellen Vergleich von  $\mu_1$  mit  $\mu_2$ .

Wir führen also einen Zweistichproben-T-Test bei unabhängigen Stichproben unter Annahme identischer Varianz durch und wollen die Hypothesen  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  und  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$  mit einem Signifikanzniveau von  $\alpha_0 = 0.05$  testen.

## Manueller Zweistichproben-T-Test

```
# Datenauswahl
x_1      = D$Delta.BDI[D$Bedingung == "Klassisch"]
x_2      = D$Delta.BDI[D$Bedingung == "Online"]
n_1      = length(x_1)
n_2      = length(x_2)
alpha_0  = 0.05
k_alpha_0 = qt(1 - (alpha_0/2), n_1+n_2-2)
x_bar_1  = mean(x_1)
x_bar_2  = mean(x_2)
s_12     = sqrt((sum((x_1-x_bar_1)^2)+sum((x_2-x_bar_2)^2))/
               (n_1+n_2-2))
t        = sqrt((n_1*n_2)/(n_1+n_2))*((x_bar_1-x_bar_2)/s_12)
if(abs(t) >= k_alpha_0){
  phi = 1
} else {
  phi = 0
}
pval     = 2*(1 - pt(abs(t), n_1+n_2-2))

# \Delta.BDI Daten Klassische Therapie
# \Delta.BDI Daten Klassische Therapie
# Stichprobengröße n_1
# Stichprobengröße n_2
# Signifikanzniveau
# kritischer Wert
# x_bar_1
# x_bar_2
# gepoolte Standardabweichung s_12
# Zweistichproben-T-Teststatistik
# Test 1_{|T(X)| >= k_alpha_0}
# Ablehnen von H_0
# Nicht Ablehnen von H_0
# p-Wert
```

## Manueller Zweistichproben-T-Test

```
# Ausgabe
cat("\nx_bar_1   = ", x_bar_1,
    "\nx_bar_2   = ", x_bar_2,
    "\nfg       = ", n_1 + n_2 - 2,
    "\nalpha_0   = ", alpha_0,
    "\nk_alpha_0 = ", k_alpha_0,
    "\nt        = ", t,
    "\nphi       = ", phi,
    "\np-Wert    = ", pval)
```

```
>
> x_bar_1 = 6.16
> x_bar_2 = 4.92
> fg      = 98
> alpha_0 = 0.05
> k_alpha_0 = 1.98
> t        = 2.65
> phi      = 1
> p-Wert   = 0.00951
```

⇒ Wir lehnen die Nullhypothese  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  ab.

## R Implementation des Zweistichproben-T-Tests

```
# Automatischer Zweistichproben-T-Test
varphi = t.test(
  x_1,
  x_2,
  var.equal = TRUE,
  alternative = c("two.sided"),
  conf.level = 1-alpha_0
  # ?t.test für Details
  # Datensatz x_1
  # Datensatz x_2
  # \sigma_1^2 = \sigma_2^2
  # H_1: \mu_1 \neq \mu_2
  # \delta = 1 - \alpha_0 (sic!)

# Ausgabe
print(varphi)
```

```
>
> Two Sample t-test
>
> data: x_1 and x_2
> t = 3, df = 98, p-value = 0.01
> alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
> 95 percent confidence interval:
>  0.31 2.17
> sample estimates:
> mean of x mean of y
>    6.16    4.92
```

```
# Genauere Ausgabe t
paste(varphi[1])
```

```
> [1] "c(t = 2.64516155336263)"
```

```
# Genauere Ausgabe p
paste(varphi[3])
```

```
> [1] "0.00951137026459394"
```

## References

---

Murrell, Paul. 2019. *R Graphics*. Third edition. The R Series. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.