Otto-Von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Psychologie
Abteilung Methodenlehre I: Methoden der experimentellen und neurowissenschaftlichen Psychologie
Prof. Dr. Dirk Ostwald

Klausur Modul A1 Multivariate Verfahren

Termin: 18.07.2022

Name, Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Bearbeitungshinweise

- Die Klausur besteht aus **20 Aufgaben**.
- Bei jeder Aufgabe sind jeweils **vier Antwortmöglichkeiten** vorgegeben, es trifft **immer genau eine** Antwort zu. Bitte kreuzen Sie bei jeder Aufgabe die zutreffende Antwort an.
- Für jede richtig gelöste Aufgabe erhalten Sie einen Punkt.

Viel Erfolg!

Gegeben seien die Vektoren

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } y := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Welche Aussage zur Länge $||x||$ von x trifft zu?
   a) $||x|| = 0$.
   b) $||x|| = \sqrt{3}$.
   c) $\boldsymbol{||x|| = 3}$.
   d) $||x|| = 9$.

2. Welche Aussage zum Skalarprodukt $\langle x, y \rangle$ von x und y trifft zu?
   a) $\langle x, y \rangle = 18$.
   b) $\boldsymbol{\langle x, y \rangle = 12}$.
   c) $\langle x, y \rangle = 6$.
   d) $\langle x, y \rangle = 0$.

Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

3. Welche Aussage zum Matrixprodukt AB von A und B trifft zu?
   a) Das Matrixprodukt AB ist nicht definiert.
   b) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.
   c) $AB = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.
   d) $\boldsymbol{AB =} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Welche Aussage zur Determinante $\det(A)$ von A trifft zu?
   a) $\det(A) = 0$.
   b) $\det(A) = 2$.
   c) $\det(A) = 3$.
   d) $\boldsymbol{\det(A) = 6}$.

5. Welche Aussage zu dem Vektor $v = (2, 0)^T$ in Hinblick auf die Matrix A trifft zu?
   a) v ist kein Eigenvektor von A
   b) v **ist Eigenvektor von** A **mit Eigenwert** 3.
   c) v ist Eigenvektor von A mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 2$.
   d) Die Matrix A hat weder Eigenwerte noch Eigenvektoren.

6. Welche der folgenden Aussagen trifft zu? Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $N(x; \mu, \Sigma)$ einer multivariaten Normalverteilung ist mit $x, \mu \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ p.d. für $n > 1$ definiert als
   a) $N(x; \mu, \Sigma) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right)$.
   b) $N(x; \mu, \Sigma) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$.
   c) $N(x; \mu, \Sigma) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$.
   d) $N(x; \mu, \Sigma) := (2\pi)^{-\frac{1}{2}} |\Sigma|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma (x-\mu)\right)$.

7. Welche Aussage zum Theorem zu Bedingten Normalverteilungen trifft **nicht** zu?
   a) Das Theorem erlaubt die Bestimmung einer bedingten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF).
   b) Das Theorem setzt bekannte Parameter einer $m+n$-dimensionalen Normalverteilung voraus.
   c) Der Erwartungswertparameter der bedingten WDF von X gegeben Y hängt von Y ab.
   d) **Der Kovarianzmatrixparameter der bedingten WDF von X gegeben Y hängt von Y ab**.

8. Welche Aussage zur Definition der Hauptkomponentenanalyse $\mathbb{C}(X) = Q\Lambda Q^T$ trifft **nicht** zu?
   a) $\mathbb{C}(X) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ bezeichnet die Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors.
   b) Bei der Gleichung $\mathbb{C}(X) = Q\Lambda Q^T$ handelt es sich um eine orthonormale Zerlegung von $\mathbb{C}(X)$.
   c) $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ist die Matrix der spaltenweisen Konkatenation der Eigenvektoren von $\mathbb{C}(X)$.
   d) $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$ **ist die Matrix der spaltenweisen Konkatenation der Eigenvektoren von** $\mathbb{C}(X)$.

9. Welche Aussage zum Theorem der Hauptkomponentenanalyse $\mathbb{C}(X) = Q\Lambda Q^T$ trifft zu?
   a) Die Spalten von Λ bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^m$.
   b) **Die Kovarianzmatrix des PCA-transfomierten Zufallsvektors ist die Diagonalmatrix** Λ.
   c) Multiplikation mit Λ^T transfomiert die kanonische Koordinaten von X in Koordinaten bezüglich der Eigenwerte von $\mathbb{C}(X)$.
   d) Die Komponenten des PCA-transfomierten Zufallsvektors sind hochgradig miteinander korreliert.

10. Welche Aussage zu Inferenz und Lernen bei Linearen Normalverteiltungsmodellen (LNMs) trifft **nicht** zu?
    a) Inferenz fragt nach der Verteilung der latenten Zufallsvektoren und ihren wahrscheinlichsten Werten.
    b) Inferenz kann mithilfe des Theorems zu bedingten multivariaten Normalverteilungen beantwortet werden.
    c) **Lernen fragt nach den Parameterwerten, die die Marginal-Likelihood Funktion minimieren**.
    d) Lernen kann mithilfe des Expectation-Maximization Algorithmus beantwortet werden.

11. Welche Aussage zum Iterationsschritt $x_{k+1} := x_k - \alpha \nabla f(x_k)$ des Gradientenverfahrens trifft **nicht** zu?
    a) Das Gradientenverfahren dient zur numerischen Minimierung der Funktion f.
    b) $\nabla f(x_k)$ **bezeichnet die Hesse-Matrix der Funktion** f **an der Stelle** x_k.
    c) Zur Bestimmung von $\nabla f(x_k)$ werden die ersten partiellen Ableitungen von f benötigt.
    d) $\alpha > 0$ heißt Lernrate.

12. Welche Aussage zum Modell der Linearen Diskriminanzanalyse (LDA) trifft zu?
    a) **Das Modell der LDA ist eine gemeinsame Verteilung einer diskreten Zufallsvariable und eines kontinuierlichen Zufallsvektors.**
    b) Die diskrete Marginalverteilung der Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\{0, 1\}$ ist eine Normalverteilung.
    c) Die kontinuierliche bedingte Verteilung des Zufallsvektors mit Ergebnisraum $\mathbb{R}^m$ ist eine Bernoulli-Verteilung.
    d) Das Modell der LDA besteht weder aus Zufallsvariablen noch aus Zufallsvektoren.

13. Welche Aussage zum Modell der Logistischen Regression (LR) trifft **nicht** zu?
    a) Das Modell der LR ist eine Bernoulli-Verteilung.
    b) Das Modell der LR kann als Generalisiertes Lineares Modell verstanden werden.
    c) Im Modell der LR hängt die Wahrscheinlichkeit der Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\{0, 1\}$ dafür, den Wert 1 anzunehmen, sowohl von einem Featurevektor als auch von einem Parametervektor ab.
    d) **Der Featurevektor im Modell der LR wird als multivariat normalverteilt angenommen.**

14. Welche Aussage zur Geometrie linearer Diskriminanzfunktionen mit Parametervektor $w \in \mathbb{R}^m$ und Biasparameter $w_0 \in \mathbb{R}$ trifft zu?
    a) **Der Parametervektor** w **hat Einfluß auf die Orientierung der Hyperebene einer linearen Diskriminanzfunktion.**
    b) w ist zu jedem Vektor, der in Richtung der Hyperebene orientiert ist, parallel.
    c) Der minimale Euklidische Abstand zwischen dem Nullpunkt und einem Punkt auf der Hyperebene hängt nicht von w_0 ab.
    d) Der minimale Euklidische Abstand zwischen einem beliebigem Punkt und einem Punkt auf der Hyperebene hängt nicht von w ab.

15. Welche Aussage zu den Ideen Universeller Approximationstheoreme im Kontext neuronaler Netze trifft **nicht** zu?
    a) **Universelle Approximationstheoreme liefern die Parameter neuronaler Netze für gegebene Datensätze.**
    b) Neuronale Netze können unter bestimmten Umständen Funktionen sehr genau approximieren.
    c) Universelle Approximationstheoreme sind topologische Aussagen über die Dichten von Funktionenräumen.
    d) Man unterscheidet bei universellen Approximationstheoremen *arbitrary width* und *arbitrary depth* Fälle.

16. Welche Aussage zu Wesen und Motivation des Backpropagation (BP) Algorithmus trifft **nicht** zu?
    a) Der BP Algorithmus dient der Bestimmung eines Gradienten.
    b) Der BP Algorithmus ist komputational effizienter als klassische Bestimmungen partieller Ableitungen.
    c) **Der BP Algorithmus ist das Batch-Gradientenverfahren für neuronale Netze.**
    d) Der BP Algorithmus beruht auf der repetitiven funktionalen Architektur neuronaler Netze.

17. Welche Aussage zur Einstichproben-T^2-Teststatistik $T^2 := n(\bar{Y} - \mu_0)^T C^{-1}(\bar{Y} - \mu_0)$ trifft zu?
    a) n bezeichnet die Dimension der Einstichproben-T^2-Test Zufallsvektoren $Y_1, ..., Y_n$.
    b) $\bar{Y}$ bezeichnet den Median der Einstichproben-T^2-Test Zufallsvektoren $Y_1, ..., Y_n$.
    c) μ_0 **bezeichnet das Element der einfachen Nullhypothese** Θ_0**.**
    d) C bezeichnet den wahren, aber unbekannten, Kovarianzmatrixparameter der Einstichproben-T^2-Test Zufallsvektoren $Y_1, ..., Y_n$.

18. Welche Aussage zur Einstichproben-T^2-Teststatistik $T^2 := n(\bar{Y} - \mu_0)^T C^{-1}(\bar{Y} - \mu_0)$ trifft **nicht** zu?
    a) T^2 ist die mit dem Stichprobenumfang skalierte Mahalanobis Distanz von $\bar{Y}$ und μ_0 hinsichtlich C.
    b) T^2 **nimmt, wenn** $\bar{Y}$**,** μ_0 **und** C **gleich bleiben, für höhere Stichprobenumfänge kleinere Werte an.**
    c) T^2 nimmt, wenn n und C gleich bleiben, für größere Abstände zwischen $\bar{Y}$ und μ_0 größere Werte an.
    d) Für $\nu := (n - m)/((n - 1)m)$ ist νT^2 nicht-zentral f-verteilt.

19. Es indiziere $i = 1, ..., k$ Stichproben (Gruppen) und $j = 1, ..., l$ die experimentellen Einheiten einer Stichprobe (Gruppe). Welche Aussage zum generativen Modell der Zufallsvektoren Y_{ij} der einfaktoriellen Varianzanalyse trifft dann zu?
    a) **Das Modell ist von der Form** $Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$ **mit** $\varepsilon_{ij} \sim N(0_m, \Sigma)$**.**
    b) Das Modell ist von der Form $Y_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij}$ mit $\varepsilon_{ij} \sim N(0_m, \Sigma)$.
    c) Das Modell ist von der Form $Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$ mit $\varepsilon_{ij} \sim f(m, n)$.
    d) Die einfaktorielle Varianzanalyse hat kein generatives Modell.

20. Welche Aussage zur Pillai's V Statistik $V = \text{tr}\left((B + W)^{-1}B\right)$ trifft **nicht** zu?
    a) W bezeichnet die Within Group Sum of Squares Matrix.
    b) B bezeichnet die Between Group Sum of Squares Matrix.
    c) **tr**$(\cdot)$ **bezeichnet die Spur, also das Produkt der Diagonalelemente, einer Matrix.**
    d) Ein hoher Wert von V spricht für einen großen Anteil der Between-Varianz an der Gesamtvarianz.