Multivariate Datenanalyse

MSc Psychologie WiSe 2021/22

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(2) Matrizen

Motivation

Matrizen sind die Worte der Sprache der multivariaten Datenanalyse.

Vektoren sind nur spezielle Matrizen.

Matrizen können als Tabellen der Datenrepräsentation dienen.

Matrizen können lineare Abbildungen repräsentieren.

Matrizen können Vektorräume repräsentieren.

Ein sicherer Umgang mit Matrizen ist für

das Verständnis multivariater Verfahren unverzichtbar.

Definition

Operationen

Determinanten

Spezielle Matrizen

Spaltenraum und Rang

Eigenanalyse

Selbstkontrollfragen

Definition

Operationen

Determinanten

Spezielle Matrizen

Spaltenraum und Rang

Eigenanalyse

Selbstkontrollfragen

Definition (Matrix)

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen, die wie folgt bezeichnet wird

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} := (a_{ij})_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le m}. \tag{1}$$

Bemerkungen

- Matrizen bestehen aus *Zeilen (rows)* und *Spalten (columns)*.
- Die Matrixeinträge a_{ij} werden mit einem *Zeilenindex* i und einem *Spaltenindex* j indiziert.
- Zum Beispiel gilt für $A := \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 0 & 9 \\ 9 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, dass $a_{32} = 4$.

Definition

Bemerkungen (fortgeführt)

- Die *Größe* oder *Dimension* einer Matrix ergibt sich aus der Anzahl ihrer Zeilen $m \in \mathbb{N}$ und Spalten $n \in \mathbb{N}$.
- Matrizen mit $m = n$ heißen *quadratische Matrizen*.
- In der Folge benötigen wir nur Matrizen mit reellen Einträgen, also $a_{ij} \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$.
- Wir nennen die Matrizen mit reellen Einträge *reelle Matrizen*.
- Die Menge der reellen Matrizen mit m Zeilen und n Spalten bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^{m \times n}$
- Aus dem Ausdruck $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ lesen wir ab, dass A eine reelle Matrix mit zwei Zeilen und drei Spalten ist.
- Wir identifizieren die Menge $\mathbb{R}^{1 \times 1}$ mit der Menge $\mathbb{R}$.
- Wir identifizieren die Menge $\mathbb{R}^{m \times 1}$ mit der Menge $\mathbb{R}^m$.
- Reelle Matrizen mit einer Spalte und m Zeilen sind also dasselbe wie m-dimensionale reelle Vektoren.

Definition

Operationen

Determinanten

Spezielle Matrizen

Spaltenraum und Rang

Eigenanalyse

Selbstkontrollfragen

Matrixoperationen

Man kann mit Matrizen rechnen.

In der Folge betrachten wir folgende grundlegende Matrixoperationen

- Addition und Subtraktion von Matrizen gleicher Größe (Matrixaddition und Matrixsubtraktion)
- Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar (Skalarmultiplikation)
- Vertauschen der Zeilen- und Spaltenanordnung (Matrixtransposition)
- Multiplikation einer Matrix mit einer passenden zweiten Matrix (Matrixmultiplikation)
- "Teilen" durch eine Matrix (Matrixinversion)

Definition (Matrixaddition)

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann ist die *Addition* von A und B definiert als die Abbildung

$$+ : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}^{m \times n},\ (A, B) \mapsto +(A, B) := A + B \tag{2}$$

mit

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3}$$

Bemerkungen

- Nur Matrizen identischer Größe können miteinander addiert werden.
- Die Addition zweier gleich großer Matrizen ist elementweise definiert.

Definition (Matrixsubtraktion)

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann ist die *Subtraktion* von A und B definiert als die Abbildung

$$- : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}^{m \times n},\ (A, B) \mapsto -(A, B) := A - B \tag{4}$$

mit

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5}$$

Bemerkungen

- Nur Matrizen identischer Größe können voneinander subtrahiert werden.
- Die Subktration zweier gleich großer Matrizen ist elementweise definiert.

Operationen

Beispiel

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ definiert als

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Da A und B gleich groß sind, können wir sie addieren

$$\begin{aligned} C = A + B &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+4 & -3+1 & 0+0 \\ 1-4 & 6+2 & 5+0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

und voneinander subtrahieren

$$\begin{aligned} D = A - B &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-4 & -3-1 & 0-0 \\ 1+4 & 6-2 & 5-0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{8}$$

Beispiel

```r
# Spaltenweise Definition von A (R default)
A = matrix(c(2,1,-3,6,0,5), nrow = 2)
print(A)
```

```
>      [,1] [,2] [,3]
> [1,]    2   -3    0
> [2,]    1    6    5
```

```r
# Zeilenweise Definition von B
B = matrix(c(4,1,0,-4,2,0), nrow = 2, byrow = TRUE)
print(B)
```

```
>      [,1] [,2] [,3]
> [1,]    4    1    0
> [2,]   -4    2    0
```

Operationen

Beispiel

```
# Addition
C = A + B
print(C)
```

```
>      [,1] [,2] [,3]
> [1,]    6   -2    0
> [2,]   -3    8    5
```

```
# Subtraktion
D = A - B
print(D)
```

```
>      [,1] [,2] [,3]
> [1,]   -2   -4    0
> [2,]    5    4    5
```

Definition (Skalarmultiplikation)

Es sei $c \in \mathbb{R}$ ein Skalar und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann ist die *Skalarmultiplikation* von c und A definiert als die Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}^{m \times n},\ (c, A) \mapsto \cdot(c, A) := cA \tag{9}$$

mit

$$cA = c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Bemerkungen

- Die Skalarmultiplikation ist elementweise definiert.

Beispiel

Es seien $c := -3$ und $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ definiert als

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Dann ergibt sich

$$B := cA = -3 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cdot 3 & -3\cdot 1 & -3\cdot 1 \\ -3\cdot 5 & -3\cdot 2 & -3\cdot 5 \\ -3\cdot 2 & -3\cdot 7 & -3\cdot 1 \\ -3\cdot 3 & -3\cdot 4 & -3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -3 \\ -15 & -6 & -15 \\ -6 & -21 & -3 \\ -9 & -12 & -6 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Operationen

Beispiel

```
# Definitionen
A = matrix(c(3,1,1,
             5,2,5,
             2,7,1,
             3,4,2),
           nrow = 4,
           byrow = TRUE)
c = -3

# Skalarmultiplikation
B = c*A
print(B)
```

```
>      [,1] [,2] [,3]
> [1,]   -9   -3   -3
> [2,]  -15   -6  -15
> [3,]   -6  -21   -3
> [4,]   -9  -12   -6
```

Operationen

Theorem (Vektorraum $\mathbb{R}^{m\times n}$)

Das Tripel $(\mathbb{R}^{m\times n}, +, \cdot)$ mit der oben definierten Matrixaddition und Skalarmultiplikation ist ein Vektorraum. Insbesondere gelten also für $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $r, s, t \in \mathbb{R}$ folgende Rechenregeln:

(1) Kommutativität der Addition	$A + B = B + A$
(2) Assoziativität der Addition	$(A + B) + C = A + (B + C)$
(3) Existenz eines neutralen Elements der Addition	$\exists\, 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $A + 0 = 0 + A = A$.
(4) Existenz inverser Elemente der Addition	$\forall A\, \exists - A$ mit $A + (-A) = 0$.
(5) Existenz eines neutralen Elements der Skalarmultiplikation	$\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ mit $1 \cdot A = A$.
(6) Assoziativität der Skalarmultiplikation	$r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t$.
(7) Distributivität hinsichtlich der Matrixaddition	$r \cdot (A + B) = r \cdot A + r \cdot B$.
(8) Distributivität hinsichtlich der Skalaraddition	$(r + s) \cdot A = r \cdot A + s \cdot A$.

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Der Beweis ergibt sich mit dem elementweisen Charakter von $+, -, \cdot$ und den Rechenregeln in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
- Das neutrale Element der Addition heißt *Nullmatrix*; wir schreiben $0_{nm} := (0)_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ mit $0 \in \mathbb{R}$.
- Die inversen Elemente der Addition sind durch $-A := (-a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ gegeben.
- Das neutrale Element der Skalarmultiplikation ist $1 \in \mathbb{R}$.

Operationen

Definition (Matrixtransposition)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann ist die *Transposition* von A definiert als die Abbildung

$$\cdot^T : \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}^{n \times m},\ A \mapsto \cdot^T(A) := A^T \tag{13}$$

mit

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{14}$$

Bemerkungen

- Die Matrixtransposition "vertauscht" Zeilen und Spalten.
- Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt immer $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$.
- Für $A \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ gilt immer $A^T = A$.
- Es gilt $\left(A^T\right)^T = A$.
- Es gilt $(a_{ii})_{1 \le i \le \min(m,n)} = (a_{ii})^T_{1 \le i \le \min(m,n)}$
- Matrixelemente auf der Hauptdiagonalen einer Matrix bleiben bei Transposition also unberührt.

Beispiel

Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

Dann gilt $A^T \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ und speziell

$$A^T := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Weiterhin gilt offenbar $\min(m, n) = 2$ und folglich

$$(a_{11}) = (a_{11})^T \text{ und } (a_{22}) = (a_{22})^T. \tag{17}$$

Operationen

Beispiel

```
# Definition
A = matrix(c(2,3,0,
             1,6,5),
           nrow = 2,
           byrow = TRUE)
print(A)
```

```
>      [,1] [,2] [,3]
> [1,]    2    3    0
> [2,]    1    6    5
```

```
# Transposition
AT = t(A)
print(AT)
```

```
>      [,1] [,2]
> [1,]    2    1
> [2,]    3    6
> [3,]    0    5
```

Definition (Matrixmultiplikation)

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Dann ist die *Matrixmultiplikation* von A und B definiert als die Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{n \times p} \to \mathbb{R}^{m \times p},\ (A, B) \mapsto \cdot(A, B) := AB \tag{18}$$

mit

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \\
&:= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{ip} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{ip} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{19}$$

Operationen

Bemerkungen

- Das Matrixprodukt AB ist nur dann definiert, wenn A genau so viele Spalten hat wie B Zeilen.
- Informell gilt für die beteiligten Matrixgrößen immer $(m \times n)(n \times p) = (m \times p)$.
- In AB ist $(AB)_{ij}$ die Summe der multiplizierten $i$ten Zeilen von A und $j$ten Spalten von B.
- Zum Berechnen von $(AB)_{ij}$ für $1 \le i \le m, 1 \le j \le p$ geht man also wie folgt vor:
  1. Man legt in Gedanken die Tranposition der $i$ten Zeile von A über die $j$te Spalte von B.
  2. Weil A genau n Spalten hat und B genau n Zeilen hat, gibt es zu jedem Element der Zeile aus A ein korrespondierendes Element in der Spalte von B.
  3. Man multipliziert die korrespondierenden Elemente miteinander.
  4. Die Summe dieser Produkte ist dann der Eintrag mit Index ij in AB.
- Die Multiplikation von Matrizen ist im Allgemeinen nicht kommutativ (also meist $AB \neq BA$).

Beispiel

$A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ seien definiert als

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Wir wollen $C := AB$ und $D := BA$ berechnen.

Mit $m = 2, n = 3$ und $p = 2$ wissen wir schon, dass $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, weil

$$(2 \times 3)(3 \times 2) = (2 \times 2) \tag{21}$$

und

$$(3 \times 2)(2 \times 3) = (3 \times 3) \tag{22}$$

Es gilt hier also sicher $AB \neq BA$.

Beispiel (fortgeführt)

Es ergibt sich zum einen

$$
\begin{aligned}
C &= AB \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + (-3) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 6 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8 + 3 + 0 & 4 + 0 + 0 \\ 4 - 6 + 5 & 2 + 0 + 15 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 3 & 17 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Operationen

Beispiel (fortgeführt)

```
# Definitionen
A = matrix(c(2,-3,0,
             1, 6,5),
           nrow  = 2,
           byrow = TRUE)
B = matrix(c( 4,2,
             -1,0,
              1,3),
           nrow  = 3,
           byrow = TRUE)

# Matrixmultiplikation
C = A %*% B
print(C)
```

```
>      [,1] [,2]
> [1,]   11    4
> [2,]    3   17
```

Beispiel (fortgeführt)

Es ergibt sich zum anderen

$$
\begin{aligned}
D &= BA \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 & 4 \cdot 0 + 2 \cdot 5 \\ (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 & (-1) \cdot (-3) + 0 \cdot 6 & (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 6 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8 + 2 & -12 + 12 & 0 + 5 \\ -2 + 0 & 3 + 0 & 0 + 0 \\ 2 + 3 & -3 + 18 & 0 + 15 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 \\ -2 & 3 & 0 \\ 5 & 15 & 15 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Beispiel (fortgeführt)

```
# Definitionen
A = matrix(c(2,-3,0,
             1, 6,5),
           nrow  = 2,
           byrow = TRUE)
B = matrix(c( 4,2,
             -1,0,
              1,3),
           nrow  = 3,
           byrow = TRUE)

# Matrixmultiplikation
D = B %*% A
print(D)
```

```
>      [,1] [,2] [,3]
> [1,]   10    0   10
> [2,]   -2    3    0
> [3,]    5   15   15
```

```
# Beispiel für eine undefinierte Matrixmultipliation
E = t(A) %*% B      # (3 x 2)(3 x 2)
```

```
> Error in t(A) %*% B: nicht passende Argumente
```

Theorem (Matrixmultiplikation und Skalarprodukt)

Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\langle x, y\rangle = x^T y. \tag{25}$$

Weiterhin seien für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ für $i = 1, ..., m$

$$\bar{a}_i := (a_{ji})_{1\le j\le n} \in \mathbb{R}^n \tag{26}$$

die Spalten von A^T und für $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ für $i = 1, ..., p$

$$\bar{b}_j := (b_{ij})_{1\le j\le n} \in \mathbb{R}^n \tag{27}$$

die Spalten von B, also

$$A^T = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m} \text{ und } B = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \cdots & \bar{b}_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times p}. \tag{28}$$

Dann gilt

$$AB = \left(\langle \bar{a}_i, \bar{b}_j\rangle\right)_{1\le i\le m, 1\le j\le p} \tag{29}$$

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen ausführlichen Beweis.
- Die erste Aussage folgt mit der Identifikation von $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$
- Der Eintrag $(AB)_{ij}$ enstpricht dem Skalarprodukt von $i$ter Spalte von A^T und $j$ter Spalte von B.

Operationen

Motivation für Begriff der Inversen einer quadratischen Matrix

- Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $x \in \mathbb{R}^m$ und $b \in \mathbb{R}^m$, A und b seien als bekannt vorausgesetzt, x sei unbekannt.
- Zum Beispiel sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$
- In diesem Fall gilt $Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 1x_1 + 2x_2 & = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 & = 11 \end{matrix}$
- Wir haben also ein *lineares Gleichungssystem (LGS)* mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten.
- Wir stellen uns vor, dass wissen möchten, für welche(s) x das LGS erfüllt ist.
- Wären $A = a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$, also $ax = b$ gegeben so würden mit dem *multiplikativem Inversen* von a multiplizieren, also dem Wert, der mit a multipliziert 1 ergibt und durch $a^{-1} = \frac{1}{a}$ gegeben ist.
- Dann würde nämlich gelten $ax = b \Leftrightarrow a^{-1}ax = a^{-1}b \Leftrightarrow 1 \cdot x = a^{-1}b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$
- Konkret etwa $2x = 6 \Leftrightarrow 2^{-1}2x = 2^{-1}6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}2x = \frac{1}{2}6 \Leftrightarrow x = 3$.
- Analog möchte mit dem *multiplikativen Inversen* A^{-1} von A multiplizieren können, sodass "$A^{-1}A = 1$".
- Dann hätte man nämlich $Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$
- Die Idee des multiplikativen Inversen wird im folgenden als *Inverse eine quadratischen Matrix* formalisiert.

Definition (Einheitsmatrix)

Die Matrix

$$I_m := (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le m} \in \mathbb{R}^{m \times m} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

mit $a_{ij} = 1$ für $i = j$ und $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$ heißt *m-dimensionale Einheitsmatrix*.

- I_m wird in R mit dem Befehl `diag(m)` erzeugt.

Theorem (Neutrales Element der Matrixmultiplikation)

I_m ist das neutrale Element der Matrixmultiplikation, d.h. es gilt für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dass

$$I_m A = A \text{ und } A I_n = A. \quad (31)$$

Beweis

Es sei $B = (b_{ij}) = I_m A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gilt für alle $1 \le i \le m$ und alle $1 \le j \le n$

$$d_{ij} = 0 \cdot a_{1j} + 0 \cdot a_{2j} + \cdots + 0 \cdot a_{i-1,j} + 1 \cdot a_{ij} + + \cdots + 0 \cdot a_{i+1,j} + 0 \cdot a_{mj} = a_{ij} \quad (32)$$

und analog für AI_n. □

Definition (Invertierbare Matrix und inverse Matrix)

$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ heißt *invertierbar*, wenn es eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ gibt, so dass

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_m \tag{33}$$

ist. Die Matrix A^{-1} heißt die *inverse Matrix von* A.

Bemerkungen

- Invertierbarkeit und inverse Matrizen beziehen sich nur auf quadratische Matrizen.
- Inverse Matrizen heißen auch einfach *Inverse*.
- Quadratische Matrizen können, müssen aber nicht invertierbar sein.
- Nicht invertierbare Matrizen nennt man *singuläre* Matrizen
- Für $A = a \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ gilt $A^{-1} = \frac{1}{a}$.
- Die Definition sagt nur aus, was eine inverse Matrix ist, nicht wie man sie berechnet.

Beispiel für eine invertierbare Matrix

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 \\ 3.0 & 4.0 \end{pmatrix}$ ist invertierbar mit inverser Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$, denn

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 \\ 3.0 & 4.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.6 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 \\ 3.0 & 4.0 \end{pmatrix}, \tag{34}$$

wovon man sich durch Nachrechnen überzeugt.

Beispiel für eine nicht-invertierbare Matrix

Die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht invertierbar, denn wäre B invertierbar, dann gäbe es $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

Das würde aber bedeuten, dass $0 = 1$ in $\mathbb{R}$ und das ist ein Widerspruch. Also kann B nicht invertierbar sein.

Berechnen inverser Matrizen

- 2×2 bis etwa 5×5 Matrizen kann man prinzipiell per Hand invertieren.
- Dazu lernt man im BSc Mathematik verschiedene Verfahren.
- Wir verzichten auf eine Einführung in die Matrizeninvertierung per Hand.
- Ein kurzes (30 min) Erklärvideo findet sich hier.
- In der Anwendung werden Matrizen standardmäßig numerisch invertiert.
- Matrixinversion ist ein weites Feld in der numerischen Mathematik.
- Es gibt sehr viele Algorithmen zur Invertierung invertierbarer Matrizen.
- Elegant berechnet man inverse Matrizen in R zum Beispiel mit dem Paket `matlib`.

Berechnen inverser Matrizen

```
# Einmalige Installation des R Pakets matlib
install.packages("matlib")
```

```
# Laden der matlib Funktionen
library(matlib)

# Definition
A = matrix(c(2,1,
             3,4),
           nrow  = 2,
           byrow = TRUE)

# Berechnen von A^{-1}
inv(A)
```

```
>      [,1] [,2]
> [1,]  0.8 -0.2
> [2,] -0.6  0.4
```

Operationen

Berechnen inverser Matrizen

```
print(inv(A) %*% A)
```

```
>          [,1] [,2]
> [1,] 1.00e+00    0
> [2,] 2.22e-16    1
```

```
print(A %*% inv(A))
```

```
>          [,1] [,2]
> [1,] 1.00e+00    0
> [2,] 4.44e-16    1
```

```
# Nicht-invertierbare Matrizen sind auch numerisch nicht-invertierbar (singulär)
B = matrix(c(1,0,
             0,0),
           nrow  = 2,
           byrow = 2)
inv(B)
```

```
> Error in Inverse(X, tol = sqrt(.Machine$double.eps), ...): X is numerically singular
```

Definition (Determinante)

Für $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit $m > 1$ sei $A_{ij} \in \mathbb{R}^{m-1 \times m-1}$ die Matrix, die aus A durch Entfernen der $i$ten Zeile und der $j$ten Spalte entsteht. Dann heißt die Zahl

$$\det(A) := a_{11} \quad \text{für } m = 1 \tag{36}$$

$$\det(A) := \sum_{j=1}^{m} a_{1j}(-1)^{1+j} \det\left(A_{1j}\right) \quad \text{für } m > 1 \tag{37}$$

die *Determinante von A*.

Bemerkungen

- Für
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \tag{38}$$
ergeben sich zum Beispiel
$$A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \tag{39}$$
- Determinanten sind nichtlineare Abbildungen der Form $\det : \mathbb{R}^{m \times m} \to \mathbb{R}, A \mapsto \det(A)$

Theorem (Determinanten von 2×2 und 3×3 Matrizen)

(1) Es sei $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 2} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann gilt

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{40}$$

(2) Es sei $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 3} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Dann gilt

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{41}$$

Bemerkungen

- Für 2×2 und 3×3 Matrizen (und nur für diese) gilt die *Sarrusche Merkregel*

  "Summe der Produkte auf den Diagonalen minus Summe der Produkte auf den Gegendiagonalen"

- Bei 3×3 Matrizen bezieht sich die Merkregel auf das Schema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \tag{42}$$

Determinanten

Beweis

Für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt nach Definition

$$
\begin{aligned}
\text{det}(A) &= \sum_{j=1}^{m} a_{1j}(-1)^{1+j}\det\left(A_{1j}\right) \\
&= a_{11}(-1)^{1+1}\det(A_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2}\det(A_{12}) \\
&= a_{11}\det((a_{22})) - a_{12}\det((a_{21})) \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt nach Definition und mit der Formel für Determinanten von 2×2 Matrizen

$$
\begin{aligned}
\text{det}(A) &= \sum_{j=1}^{m} a_{1j}(-1)^{1+j}\det\left(A_{1j}\right) \\
&= a_{11}(-1)^{1+1}\det\left(A_{1j}\right) + a_{12}(-1)^{1+2}\det\left(A_{12}\right) + a_{13}(-1)^{1+3}\det\left(A_{13}\right)) \\
&= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13}) \\
&= a_{11}\det\left(\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) - a_{12}\det\left(\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}\right) + a_{13}\det\left(\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\right) \\
&= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Determinanten

Beispiel 1

Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{45}$$

Dann ergeben sich

$$\det(A) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 8 - 3 = 5. \tag{46}$$

und

$$\det(B) = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0 - 0 = 0. \tag{47}$$

Beispiel 2 Es sei

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{48}$$

Dann ergibt sich

$$\det(C) = 2 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 0 = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6 \tag{49}$$

Determinanten

```
# Beispiel 1
A = matrix(c(2,1,                         # Matrixdefinition
             3,4),
           nrow = 2,
           byrow = TRUE)
det(A)                                     # Determinantenberechnung
```

```
> [1] 5
```

```
B = matrix(c(1,0,                         # Matrixdefinition
             0,0),
           nrow = 2,
           byrow = TRUE)
det(B)                                     # Determinantenberechnung
```

```
> [1] 0
```

```
# Beispiel 2
C = matrix(c(2,0,0,                       # Matrixdefinition
             0,1,0,
             0,0,3),
           nrow = 3,
           byrow = TRUE)
det(C)                                     # Determinantenberechnung
```

```
> [1] 6
```

Determinanten

Theorem (Rechenregeln für Determinanten)

Determinantenmultiplikationssatz

- Für $A, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ gilt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B). \tag{50}$$

Transposition

- Für $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ gilt

$$\det(A) = \det\left(A^T\right). \tag{51}$$

Dreiecksmatrizen

- Für Matrizen $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le m} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit $a_{ij} = 0$ für $i > j$ oder $a_{ij} = 0$ für $j > i$ gilt

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{m} a_{ii} \tag{52}$$

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Bei Dreiecksmatrizen sind alle Elemente unterhalb $(i > j)$ oder oberhalb $(j > i)$ der Diagonalen 0
- Bei I_m sind alle nicht-diagonalen Elemente 0 und alle diagonalen Elemente 1, also folgt $\det(I_m) = 1$.

Theorem (Invertierbarkeit und Determinante)

$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ist dann und nur dann invertierbar, wenn gilt, dass $\det(A) \neq 0$. Es gilt also

$$A \text{ ist invertierbar} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \text{ und} A \text{ ist nicht invertierbar} \Leftrightarrow \det(A) = 0. \tag{53}$$

Beweisandeutung

Wir zeigen lediglich, dass aus der Invertierbarkeit von A folgt, dass $\det(A)$ nicht null sein kann. Nehmen wir also an, dass A ist invertierbar. Dann gibt es eine Matrix B mit $AB = I_m$ und mit dem Determinantenmultiplikationssatz folgt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(I_m) = 1. \tag{54}$$

Also kann $\det(A) = 0$ nicht gelten, denn sonst wäre $0 = 1$.

□

Bemerkung

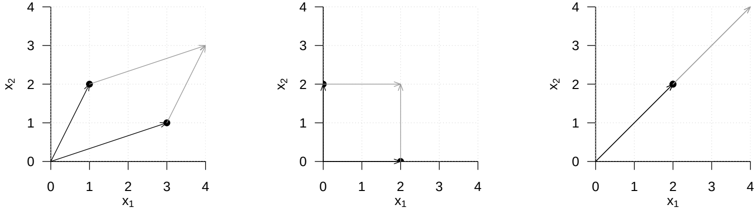
- A ist nicht invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) = 0$ ist für die Eigenanalyse essentiell.

Visuelle Intuition

$a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}^m$ seien die Spalten von $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

$\Rightarrow \det(A)$ enstpricht dem signierten Volumen des von $a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}^m$ aufgespannten Parallelotops.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\det(A_1) = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5 \qquad \det(A_2) = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 \qquad \det(A_3) = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0$$

Definition

Operationen

Determinanten

Spezielle Matrizen

Spaltenraum und Rang

Eigenanalyse

Selbstkontrollfragen

Spezielle Matrizen

Definition (Nullmatrizen, Einheitsmatrizen, Einheitsvektoren, Einsvektoren)

- Wir bezeichnen *Nullmatrizen* mit

$$0_{mn} := (0)_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ und } 0_m := (0)_{1\le i\le m} \in \mathbb{R}^m \tag{55}$$

- Wir bezeichnen die *Einheitsmatrix* mit

$$I_m := (i_{jk})_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ mit } i_{jk} = 1 \text{ für } j = k \text{ und } i_{jk} = 0 \text{ für } j \neq k \tag{56}$$

- Wir bezeichnen die *Einheitsvektoren* $e_1, i = 1, ..., m$ mit

$$e_i := (e_{i_j})_{1\le j\le m} \in \mathbb{R}^m \text{ mit } e_{i_j} = 1 \text{ für } i = j \text{ und } e_{i_j} = 0 \text{ für } i \neq j \tag{57}$$

- Wir bezeichnen den *Einsvektor* mit

$$1_m := (1)_{1\le i\le m} \in \mathbb{R}^m \tag{58}$$

Bemerkungen

- 0_{mn} und 0_m bestehen nur aus Nullen.
- I_m besteht nur aus Nullen und Diagonalelementen gleich Eins.
- $e_i, i1, ..., m$ besteht nur aus Nullen und einer Eins in der $i$ten Komponente.
- 1_m besteht nur aus Einsen.

Spezielle Matrizen

Definition (Symmetrische, diagonale, und orthogonale Matrizen)

- Eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ heißt *symmetrisch*, wenn gilt dass $S^T = S$.
- Eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ heißt *Diagonalmatrix*, wenn $d_{ij} = 0$ für $1 \leq i, j \leq m, i \neq j$.
- Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ heißt *orthogonal*, wenn ihre Spaltenvektoren wechselseitig *orthonormal* sind.

Bemerkungen

- Eine Diagonalmatrix D mit Diagonalelementen $d_1, ..., d_n$ schreibt man auch als $D = \text{diag}(d_1, ..., d_n)$
- Symmetrische, diagonale, und orthogonale Matrizen haben viele "gute" Eigenschaften.
- Im folgenden wichtige Eigenschaften sind
  - $D := \text{diag}(d_1, ..., d_n)$ ist eine Diagonalmatrix $\Rightarrow \det(D) = \prod_{i=1}^n d_i$.
  - Q ist orthogonal $\Rightarrow Q^{-1} = Q^T$ (weil $Q^T Q = QQ^T = I_m$).

Definition (Positiv-definite und positiv-semidefinite Matrizen)

- Eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ heißt *positiv-definit*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^m$ mit $x \neq 0_m$ gilt, dass
$$x^T Ax > 0. \tag{59}$$
- Eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ heißt *positiv-semidefinit*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^m$ mit $x \neq 0_m$ gilt, dass
$$x^T Ax \geq 0. \tag{60}$$

Bemerkungen

- Positiv-definite und positiv-semidefinite Matrizen haben viele “gute” Eigenschaften.
- Im folgenden wichtige Eigenschaften sind
    - C ist positiv-definit $\Rightarrow$ $\det(C) > 0$ und C ist invertierbar.
    - C ist positiv-definit $\Rightarrow$ Es gibt eine Matrix $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit $C = KK^T$.
    - C ist positiv-definit $\Rightarrow$ Alle Eigenwerte von C sind positiv.

Definition

Operationen

Determinanten

Spezielle Matrizen

Spaltenraum und Rang

Eigenanalyse

Definition (Spaltenraum und Rang einer Matrix)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und

$$a_1 := \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, a_2 := \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, ..., a_n := \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \tag{61}$$

seien die *Spalten(vektoren)* von A. Dann heißt

$$\text{col}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i a_i | c_i \text{ mit } i = 1, ..., n \in \mathbb{R} \right\} \tag{62}$$

der *Spaltenraum* von A. Die Dimension von col(A) heißt *der Rang von* A. Ist die Dimension von col(A) gleich n, so sagt man, dass A *vollen Spaltenrang hat*.

Bemerkungen

- col(A) ist die Menge aller Linearkombinationen der Spaltenvektoren von A
- Die Dimension von col(A) entspricht der Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren von A.
- Mit $c := (c_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{R}^n$ gilt col$(A) = \{Ac | c \in \mathbb{R}^n\}$.

Selbstkontrollfragen

Definition (Eigenvektor, Eigenwert)

$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sei eine quadratische Matrix. Dann heißt jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^m, v \neq 0$, für den gilt, dass

$$Av = \lambda v \tag{63}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ein *Eigenvektor* von A. λ heißt zugehöriger *Eigenwert* von A.

Bemerkungen

- Ein Eigenvektor v von A wird durch A mit einem Faktor λ verlängert.
- Jeder Eigenvektor hat einen zugehörigen Eigenwert.
- Die Eigenwerte verschiedener Eigenvektor können identisch sein.

Theorem

$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sei eine quadratische Matrix. Wenn $v \in \mathbb{R}^m$ Eigenvektor von A mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, dann ist auch $av \in \mathbb{R}^m$ mit $a \in \mathbb{R}$ Eigenvektor von A und zwar mit Eigenwert $a\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis

Es gilt

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow a(Av) = a(\lambda)v \Leftrightarrow A(av) = (a\lambda)v \tag{64}$$

Also ist av ein Eigenvektor von A mit Eigenwert $a\lambda$.

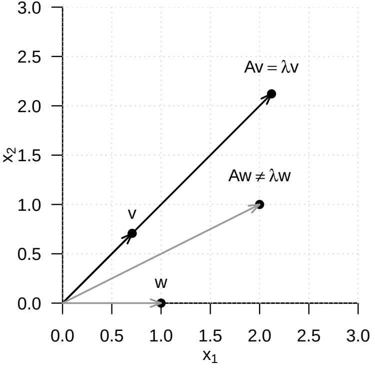
$\square$

Konvention

Wir betrachten im Folgenden nur Eigenvektoren mit $\|v\| = 1$.

Visualisierung eines Eigenvektors

Für $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist $v := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 3$, $w := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist kein Eigenvektor.



Theorem (Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren)

$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sei eine quadratische Matrix. Dann ergeben sich die Eigenwerte von A als die Nullstellen des *charakteristischen Polynoms*

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_m). \tag{65}$$

von A. Weiterhin seien $\lambda_i^*, i = 1, 2, ...$ die auf diese Weise bestimmten Eigenwerte von A. Die entsprechenden Eigenvektoren $v_i, i = 1, 2, ...$ von A können dann durch Lösen der linearen Gleichungssysteme

$$(A - \lambda_i^* I_m)v_i = 0_m \text{ für } i = 1, 2, ... \tag{66}$$

bestimmt werden.

Bemerkungen

- Für kleine Matrizen mit $m \leq 3$ können Eigenwerte und Eigenvektoren manuell bestimmt werden.
- Bei großen Matrizen werden Eigenwerte und Eigenvektor im Allgemeinen numerisch bestimmt.
- R's `eigen()`, Scipy's `linalg.eig()`, Matlab's `eig()`.

Beweis

(1) Bestimmen von Eigenwerten

Wir halten zunächst fest, dass mit der Definition von Eigenvektoren und Eigenwerten gilt, dass

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0_m \Leftrightarrow (A - \lambda I_m)v = 0_m. \tag{67}$$

Für den Eigenwert λ wird der Eigenvector v also durch $(A - \lambda I_m)$ auf den Nullvektor 0_m abgebildet. Weil aber per Definition $v \neq 0_m$ gilt, ist die Matrix $(A - \lambda I_m)$ somit nicht invertierbar: sowohl der Nullvektor als auch v werden durch A auf 0_m abgebildet, die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, x \mapsto (A - \lambda I_m)x \tag{68}$$

ist also nicht bijektiv, und $(A - \lambda I_m)^{-1}$ kann nicht existieren. Die Tatsache, dass $(A - \lambda I_m)$ nicht invertierbar ist, ist aber äquivalent dazu, dass die Determinante von $(A - \lambda I_m)$ Null ist. Also ist

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_m) = 0 \tag{69}$$

notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass λ ein Eigenwert von A ist.

(2) Bestimmen von Eigenvektoren

Es sei λ_i^* ein Eigenwert von A. Dann gilt mit den obigen Überlegungen, dass Auflösen von

$$(A - \lambda_i^* I_m)v_i^* = 0_m \tag{70}$$

nach v_i^* einen Eigenvektor zum Eigenwert λ^* ergibt. $\square$

Beispiel 1

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{71}$$

Wir wollen die Eigenwerte und Eigenvektoren von A bestimmen.

(1) Berechnen von Eigenwerten

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A.

Das charakteristische Polynom von A ergibt als

$$\chi_A(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1. \tag{72}$$

Nullsetzen und Auflösen nach λ ergibt mit der pq-Formel

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1. \tag{73}$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 1$.

Eigenanalyse

Beispiel 1 (fortgeführt)

(2) Berechnen von Eigenvektoren

Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 1$ ergeben sich durch Lösen der linearen Gleichungssysteme

$$(A - \lambda_i I_2)v_i = 0_2 \tag{74}$$

Für $\lambda_1 = 3$ ergibt sich

$$(A - 3I_2)v_1 = 0_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist eine Lösung.} \tag{75}$$

Fpr $\lambda_2 = 1$ ergibt sich

$$(A - 1I_2)v_2 = 0_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ist eine Lösung.} \tag{76}$$

Weiterhin gilt $v_1^T v_2 = 0$ und $||v_1||_2 = ||v_2||_2 = 1$.

Eigenanalyse

```r
# Matrixdefinition
A = matrix(c(2,1,
             1,2),
           nrow  = 2,
           byrow = TRUE)

# Eigenanalyse
eigen(A)
```

```
> eigen() decomposition
> $values
> [1] 3 1
>
> $vectors
>        [,1]   [,2]
> [1,] 0.707 -0.707
> [2,] 0.707  0.707
```

Theorem (Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen)

Eine symmetrische Matrix $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ hat m verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$ mit zugehörigen orthogonalen Eigenvektoren $q_1, ..., q_m \in \mathbb{R}^m$.

Bemerkungen

- Das Theorem ist eine Konsequenz aus dem Spektralsatz der Linearen Algebra.
- Ein vollständiger Beweis findet sich in Strang (2009), Section 6.4.

Teilbeweis

Wir setzen die Tatsache, dass S m verschiedene Eigenwerte hat, als gegeben voraus und zeigen lediglich, dass die Eigenvektoren von S orthogonal sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien also λ_i und λ_j mit $1 \le i, j \le m$ znd $\lambda_i \ne \lambda_j$ zwei der m verschiedenen Eigenwerte von S mit zugehörigen Eigenvektoren q_i und q_j, respektive. Dann ergibt sich

$$Sq_i = \lambda_i q_i \Leftrightarrow (Sq_i)^T = (\lambda_i q_i)^T \Leftrightarrow q_i^T S = q_i^T \lambda_i \Leftrightarrow q_i^T S q_j = \lambda_i q_i^T q_j. \tag{77}$$

Ähnlicherweise gilt

$$Sq_j = \lambda_j q_j \Leftrightarrow q_i^T S q_j = \lambda_j q_i^T q_j. \tag{78}$$

Also folgt

$$\lambda_i q_i^T q_j = \lambda_j q_i^T q_j \text{ mit } q_i \ne 0, q_j \ne 0, \text{ und } \lambda_i \ne \lambda_j \tag{79}$$

und damit die Orthogonalität $q_i^T q_j = 0$. □

Theorem (Orthonormale Zerlegung einer symmetrischen Matrix)

$S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sei eine symmetrische Matrix. Dann kannn S geschrieben werden als

$$S = Q\Lambda Q^T, \tag{80}$$

wobei $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix ist und $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine Diagonalmatrix ist.

Beweis

Weil S symmetrisch ist, hat sie m verschiedene Eigenwerte $\lambda_i, i = 1, ..., m$ und m zugehörige orthogonale Eigenvektoren $q_i, i = 1, ..., m$, so dass

$$Sq_i = \lambda_i q_i \text{ for } i = 1, ..., m. \tag{81}$$

Mit den Definitionen

$$Q := \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_m \end{pmatrix} \text{ und } \Lambda := \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\right), \tag{82}$$

folgt dann

$$SQ = \Lambda Q \Leftrightarrow SQ = Q\Lambda. \tag{83}$$

Rechtseitige Multiplikation mit Q^T ergibt dann

$$SQQ^T = Q\Lambda Q^T \Leftrightarrow SI_m = Q\Lambda Q^T \Leftrightarrow S = Q\Lambda Q^T \tag{84}$$

und damit ist alles gezeigt. □

Beispiel 1 (fortgeführt)

Für

$$Q := \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \text{ and } \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \tag{85}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
Q\Lambda Q^T &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}^T \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= A
\end{aligned}$$

Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie Definition einer Matrix wieder.
2. Nennen Sie sechs Matrixoperationen.
3. Geben Sie Definitionen der Matrixaddition und -subtraktion wieder.
4. Geben Sie die Definition der Skalarmultiplikation für Matrizen wieder.
5. Geben Sie die Definition der Matrixtransposition wieder.
6. Es seien
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ und } c := 2 \tag{86}$$
   Berechnen Sie
$$D := c\left(A - B^T\right) \text{ und } E := (cA)^T + B. \tag{87}$$
   per Hand und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit R.
7. Geben Sie die Definition der Matrixmultiplikation wieder.
8. Es seien $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $C \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Prüfen Sie, ob folgende Matrixprodukte definiert sind, und wenn ja, geben Sie die Größe der resultierenden Matrix and
$$ABC, \quad ABC^T, \quad , A^TCB^T \quad , BAC \tag{88}$$

Selbstkontrollfragen

9. Es seien
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{89}$$
   Berechnen Sie die Matrixprodukte
$$AB, \qquad B^T A^T, \qquad \left(B^T A^T\right)^T, \qquad AC \tag{90}$$
   per Hand und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit R.
10. Invertieren Sie die Matrizen A und B aus der vorherigen Aufgabe mithilfe von matlib::inv und überprüfen Sie die Inverseeigenschaft der inversen Matrizen mithilfe von R.
11. Geben Sie die Formel für die Determinante von $A := (A_{ij})_{1 \le i,j \le 2} \in \mathbb{R}^2$ wieder.
12. Geben Sie die Formel für die Determinante von $A := (A_{ij})_{1 \le i,j \le 3} \in \mathbb{R}^3$ wieder.
13. Berechnen Sie die Determinanten von
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } C := \text{diag}(1, 2, 3) \tag{91}$$
   per Hand und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit R.

Selbstkontrollfragen

14. Geben Sie den Determinantenmultiplikationssatz wieder.
15. Geben Sie das Theorem zur Invertierbarkeit und Determinante von Matrizen wieder.
16. Geben Sie die Definition einer symmetrischen Matrix wieder.
17. Geben Sie die Definition einer Diagonalmatrix wieder.
18. Geben Sie die Definition einer orthogonalen Matrix wieder.
19. Geben Sie die Definition einer positiv-definiten und einer positiv-semidefiniten Matrix wieder.
20. Geben Sie die Definition des Spaltenraums einer Matrix wieder.
21. Wann sagt man, dass eine Matrix vollen Spaltenrang hat?
22. Geben Sie die Definition eines Eigenvektors und eines Eigenwertes einer quadratischen Matrix wieder.
23. Geben Sie das Theorem zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren wieder.
24. Geben Sie das Theorem zu den Eigenwerten und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen wieder.
25. Geben Sie das Theorem zur orthonormalen Zerlegung einer symmetrischen Matrix wieder.
26. Dokumentieren Sie die in dieser Einheit eingeführten R Befehle in einem R Skript.

References

Strang, Gilbert. 2009. *Introduction to Linear Algebra*.