Grundlagen der Mathematik und Informatik

BSc Psychologie WiSe 2021/22

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(2) Summen, Produkte, Potenzen

Summen, Produkte, Potenzen

Definition (Summenzeichen)

Summen werden oft mithilfe des *Summenzeichens*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \tag{1}$$

dargestellt. Dabei stehen

- Σ für das griechische *S*igma, mnemonisch für *S*umme,
- das Subskript $i = 1$ für den Laufindex der Summanden und den Startindex,
- das Superskript n für den Endindex,
- $x_1, x_2, ..., x_n$ für die Summanden.

Bemerkungen

- Nur mit Subskript und Superskripten macht das Summenzeichen Sinn.
- Die Bezeichnung des Laufindexes ist irrelevant, es gilt $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$.
- Manchmal wird der Laufindex auch als Element einer Indexmenge I angegeben.
- Ist z.B. die Indexmenge $I := \{1, 5, 7\}$ definiert, so ist $\sum_{i \in I} x_i := x_1 + x_5 + x_7$.

Theorem (Rechenregeln für Summen)

Summen gleicher Summanden

$$\sum_{i=1}^{n} x = nx \tag{2}$$

Assoziativität bei Summen gleicher Länge

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \tag{3}$$

Distributivität bei Multiplikation mit einer Konstante

$$\sum_{i=1}^{n} a x_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{4}$$

Aufspalten von Summen mit $1 < m < n$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=m+1}^{n} x_i \tag{5}$$

Umindizierung

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{j=m}^{n+m} x_{j-m} \tag{6}$$

Definition (Produktzeichen)

Produkte werden oft mithilfe des *Produktzeichens*

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n \tag{7}$$

dargestellt. Dabei stehen

- $\prod$ für das griechische *P*i, mnemonisch für *P*rodukt,
- das Subskript $i = 1$ für den Laufindex der Produkterme und den Startindex,
- das Superskript n für den Endindex,
- $x_1, x_2, ..., x_n$ für die Produktterme.

Bemerkungen

- Nur mit Subskript und Superskripten macht das Produktzeichen Sinn.
- Die Bezeichnung des Laufindexes ist irrelevant, es gilt $\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{j=1}^{n} x_j$.
- Manchmal wird der Laufindex auch als Element einer Indexmenge I angegeben.
- Ist z.B. die Indexmenge $J := \mathbb{N}_2^0$ definiert, so ist $\sum_{j \in J} x_j := x_0 + x_1 + x_2$.

Definition (Potenz)

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}^0$ ist die n*-te Potenz von* a definiert durch

$$a^0 := 1 \text{ und } a^{n+1} := a^n \cdot a. \tag{8}$$

Weiterhin ist für $a \in \mathbb{R} \setminus 0$ und $n \in \mathbb{N}^0$ die *negative* n*-te Potenz von* a definiert durch

$$a^{-n} := (a^n)^{-1} := \frac{1}{a^n}. \tag{9}$$

a wird dabei *Basis* und n wird *Exponent* genannt.

Theorem (Rechenregel für Potenzen)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$ bei negativen Exponenten gelten

$$a^n a^m = a^{n+m} \tag{10}$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \tag{11}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \tag{12}$$

Definition (n-te Wurzel)

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die *n-te Wurzel von a* definiert als die Zahl r, so dass

$$r^n = a. \tag{13}$$

Theorem (Potenzschreibweise der n-ten Wurzel)

Es sei $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und r die n-te Wurzel von a. Dann gilt

$$r = a^{\frac{1}{n}} \tag{14}$$

Beweis

Es gilt

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \cdots \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}} = a^1 = a. \tag{15}$$

Also gilt mit der Definition der n-ten Wurzel, dass $r = a^{\frac{1}{n}}$.

$\square$

Bemerkung

- Das Rechnen mit Quadratwurzeln wird durch $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ sehr erleichtert.

Selbstkontrollfragen

1. Berechnen Sie die Summen $\sum_{i=1}^{3} 2$, $\sum_{i=1}^{3} i^2$, und $\sum_{i=1}^{3} \frac{2}{3} i$.
2. Schreiben Sie die Summe $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$ mithilfe des Summenzeichens.
3. Schreiben Sie die Summe $0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10$ mithilfe des Summenzeichens.
4. Definieren Sie das Produktzeichen.
5. Für $a \in \mathbb{R}$, definieren Sie die $n$te (negative) Potenz von a.
6. Berechnen Sie $2^2 \cdot 2^3$ und 2^5. Geben Sie die zugehörige Potenzregel an.
7. Berechnen Sie 6^2 und $2^2 \cdot 3^2$. Geben Sie die zugehörige Potenzregel an.
8. Warum kann die n-te Wurzel von a als $a^{\frac{1}{n}}$ geschrieben werden?
9. Berechnen Sie $(\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}$, $9^{\frac{1}{2}}$, und $4^{-\frac{1}{2}}$.