Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2024/25

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(4) Zufallsvektoren

Definition

Multivariate Verteilungen

Marginalverteilungen

Bedingte Verteilungen

Unabhängige Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

Definition (Zufallsvektor)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ sei ein n-dimensionaler Messraum. Ein n-dimensionaler *Zufallsvektor* ist definiert als eine Abbildung

$$\xi : \Omega \to \mathcal{X}, \omega \mapsto \xi(\omega) := \begin{pmatrix} \xi_1(\omega) \\ \vdots \\ \xi_n(\omega) \end{pmatrix} \tag{1}$$

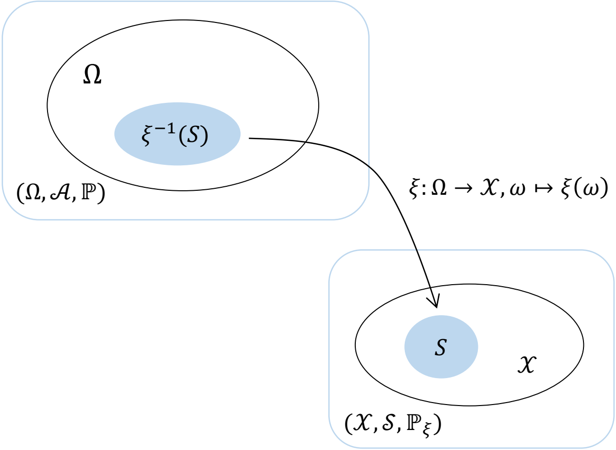
mit der *Messbarkeitseigenschaft*

$$\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\} \in \mathcal{A} \text{ für alle } S \in \mathcal{S}. \tag{2}$$

Bemerkungen

- ξ ist hier eine univariate, vektorwertige Abbildung.
- Das Standardbeispiel für $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ ist $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.
- Wir verzichten auf eine explizite Einführung n-dimensionaler σ-Algebren wie $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
- Ohne Beweis halten wir fest, dass ξ messbar ist, wenn die Funktionen $\xi_1, ..., \xi_n$ messbar sind.
- Die Komponentenfunktionen eines Zufallsvektors sind Zufallsvariablen.
- Ein n-dimensionaler Zufallsvektor ist die Konkatenation von n Zufallsvariablen.
- Für $n := 1$ ist ein Zufallsvektor eine Zufallsvariable.
- Für einen Zufallsvektor schreiben wir auch häufig $\xi := (\xi_1, ..., \xi_n)$.

Definition



$$\xi : \Omega \to \mathcal{X}, \omega \mapsto \xi(\omega) := \begin{pmatrix} \xi_1(\omega) \\ \vdots \\ \xi_n(\omega) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}\left(\xi^{-1}(S)\right) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\}) =: \mathbb{P}_\xi(S)$$

Definition

Multivariate Verteilungen

Marginalverteilungen

Bedingte Verteilungen

Unabhängige Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

Definition (Multivariate Verteilung)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ sei ein n-dimensionaler Messraum und

$$\xi : \Omega \to \mathcal{X}, \omega \mapsto \xi(\omega) \tag{3}$$

sei ein Zufallsvektor. Dann heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_\xi$, definiert durch

$$\mathbb{P}_\xi : \mathcal{S} \to [0,1], S \mapsto \mathbb{P}_\xi(S) := \mathbb{P}(\xi^{-1}(S)) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\}\right) \tag{4}$$

die *multivariate Verteilung des Zufallsvektor* ξ.

Bemerkungen

- Der Einfachheit halber spricht man oft auch nur von "der Verteilung des Zufallsvektors ξ".
- Die Notationskonventionen für Zufallsvariablen gelten für Zufallsvektoren analog, z.B.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\xi(\xi \in S) &:= \mathbb{P}\left(\{\xi \in S\}\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\}\right) \\
\mathbb{P}_\xi(\xi = x) &:= \mathbb{P}\left(\{\xi = x\}\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) = x\}\right) \\
\mathbb{P}_\xi(\xi \le x) &:= \mathbb{P}\left(\{\xi \le x\}\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \le x\}\right) \\
\mathbb{P}_\xi(x_1 \le \xi \le x_2) &:= \mathbb{P}\left(\{x_1 \le \xi \le x_2\}\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega | x_1 \le \xi(\omega) \le x_2\}\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

- Relationsoperatoren wie $\le$ werden hier *komponentenweise* verstanden.
- Zum Beispiel heißt $x \le y$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$, dass $x_i \le y_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

Definition (Diskreter Zufallsvektor, Multivariate WMF)

ξ sei ein Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathcal{X}$. ξ heißt *diskreter Zufallsvektor* wenn der Ergebnisraum $\mathcal{X}$ endlich oder abzählbar ist und eine Funktion

$$p_\xi : \mathcal{X} \to [0,1], x \mapsto p_\xi(x) \tag{6}$$

existiert, für die gilt

(1) $\sum_{x \in \mathcal{X}} p_\xi(x) = 1$ und

(2) $\mathbb{P}_\xi(\xi = x) = p_\xi(x)$ für alle $x \in \mathcal{X}$.

Ein entsprechende Funktion p heißt *multivariate Wahrscheinlichkeitsmassefunktion (WMF)* von ξ.

Bemerkungen

- Der Begriff der multivariaten WMF ist analog zum Begriff der WMF.
- Man spricht oft einfach von der WMF eines Zufallsvektors.
- Wie univariate WMFen sind multivariate WMFen nicht-negativ und normiert.

Beispiel (Multivariate Wahrscheinlichkeitsmassefunktion)

Wir betrachten einen zweidimensionalen Zufallsvektor $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ der Werte in $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ annimmt, wobei $\mathcal{X}_1 := \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{X}_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ seien. Dann entspricht der Ergebnisraum von ξ der in untenstehender Tabelle spezifizierten Menge an Tupeln (x_1, x_2).

(x_1, x_2)	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$
$x_1 = 1$	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(1, 4)$
$x_1 = 2$	$(2, 1)$	$(2, 2)$	$(2, 3)$	$(2, 4)$
$x_1 = 3$	$(3, 1)$	$(3, 2)$	$(3, 3)$	$(3, 4)$

Beispiel (Multivariate Wahrscheinlichkeitsmassefunktion)

Wir betrachten einen zweidimensionalen Zufallsvektor $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ der Werte in $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ annimmt, wobei $\mathcal{X}_1 := \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{X}_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ seien.

Eine exemplarische bivariate WMF der Form

$$p_\xi : \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\} \to [0, 1], (x_1, x_2) \mapsto p_\xi(x_1, x_2) \tag{7}$$

ist dann durch nachfolgende Tabelle definiert:

$p_\xi(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$
$x_1 = 1$	0.1	0.0	0.2	0.1
$x_1 = 2$	0.1	0.2	0.0	0.0
$x_1 = 3$	0.0	0.1	0.1	0.1

Man beachte, dass

$$\sum_{x_1=1}^{3} \sum_{x_2=1}^{4} p_\xi(x_1, x_2) = 1. \tag{8}$$

Definition (Kontinuierlicher Zufallsvektor, Multivariate WDF)

Ein Zufallsvektor ξ heißt *kontinuierlich*, wenn $\mathbb{R}^n$ der Ergebnisraum von ξ ist und eine Funktion

$$p_\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto p_\xi(x), \tag{9}$$

existiert, für die gilt

(1) $\int_{\mathbb{R}^n} p_\xi(x)\,dx = 1$ und

(2) $\mathbb{P}_\xi(x_1 \leq \xi \leq x_2) = \int_{x_{1_1}}^{x_{2_1}} \cdots \int_{x_{1_n}}^{x_{2_n}} p_\xi(s_1, ..., s_n)\,ds_1 \cdots ds_n$.

Eine entsprechende Funktion p heißt *multivariate Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF)* von ξ.

Bemerkungen

- Der Begriff der multivariaten WDF ist analog zum Begriff der WDF.
- Man spricht häufig auch einfach von der WDF eines Zufallsvektors
- Wie univariate WDFen sind multivariate WDFen nicht-negativ und normiert.
- Wie für kontinuierliche Zufallsvariablen gilt für kontinuierliche Zufallsvektoren

$$\mathbb{P}_\xi(\xi = x) = \mathbb{P}_\xi(x \leq \xi \leq x) = \int_{x_1}^{x_1} \cdots \int_{x_n}^{x_n} p_\xi(s_1, ..., s_n)\,ds_1 \cdots ds_n = 0. \tag{10}$$

- Das Standardbeispiel ist die multivariate Normalverteilung.

Definition

Multivariate Verteilungen

Marginalverteilungen

Bedingte Verteilungen

Unabhängige Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

Definition (Univariate Marginalverteilung)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ sei ein n-dimensionaler Messraum, $\xi : \Omega \to \mathcal{X}$ sei ein Zufallsvektor, $\mathbb{P}_\xi$ sei die Verteilung von ξ, $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{X}$ sei der Ergebnisraum der $i$ten Komponente ξ_i von ξ, und $\mathcal{S}_i$ sei eine σ-Algebra auf ξ_i. Dann heißt die durch

$$\mathbb{P}_{\xi_i} : \mathcal{S}_i \to [0,1], S \mapsto \mathbb{P}_\xi \left(\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_{i-1} \times S \times \mathcal{X}_{i+1} \times \cdots \times \mathcal{X}_n\right) \text{ für } S \in \mathcal{S}_i \tag{11}$$

definierte Verteilung die *$i$te univariate Marginalverteilung von ξ*.

Bemerkungen

- Univariate Marginalverteilungen sind die Verteilungen der Komponenten eines Zufallsvektors.
- Univariate Marginalverteilungen sind Verteilungen von Zufallsvariablen.
- Die Festlegung der multivariaten Verteilung von ξ legt auch die Verteilungen der ξ_i fest.

Theorem (Marginale Wahrscheinlichkeitsmasse- und -dichtefunktionen)

(1) $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ sei ein n-dimensionaler diskreter Zufallsvektor mit Wahrscheinlichkeitsmassefunktion p_ξ und Komponentenergebnisräumen $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_n$. Dann ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsmassefunktion der $i$ten Komponente ξ_i von ξ als

$$p_{\xi_i} \;:\; \mathcal{X}_i \;\to\; [0,1], x_i \;\mapsto\; p_{\xi_i}(x_i) \;:=\; \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{i-1}} \sum_{x_{i+1}} \cdots \sum_{x_n} p_\xi(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n). \quad (12)$$

(2) $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ sei ein n-dimensionaler kontinuierlicher Zufallsvektor mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion p_ξ und Komponentenergebnisraum $\mathbb{R}$. Dann ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der $i$ten Komponente ξ_i von ξ als

$$\begin{aligned} & p_{\xi_i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ & \quad x_i \mapsto p_{\xi_i}(x_i) := \int_{x_1} \cdots \int_{x_{i-1}} \int_{x_{i+1}} \cdots \int_{x_n} p_\xi(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n. \end{aligned} \quad (13)$$

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Die WMFen univariater Marginalverteilungen diskreter Zufallsvektoren ergeben sich durch Summation.
- Die WDFen univariater Marginalverteilungen kontinuierlicher Zufallsvektoren ergeben sich durch Integration.

Beispiel (Marginale Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen)

Wir betrachten erneut den zweidimensionalen Zufallsvektor $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ der Werte in $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ annimmt, wobei $\mathcal{X}_1 := \{1,2,3\}$ und $\mathcal{X}_2 = \{1,2,3,4\}$ seien.

Basierend auf der oben definierten WMF ergeben sich folgende marginale WMFen p_{ξ_1} und p_{ξ_2}:

$p_\xi(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$p_{\xi_1}(x_1)$
$x_1 = 1$	0.1	0.0	0.2	0.1	0.4
$x_1 = 2$	0.1	0.2	0.0	0.0	0.3
$x_1 = 3$	0.0	0.1	0.1	0.1	0.3
$p_{\xi_2}(x_2)$	0.2	0.3	0.3	0.2	

Man beachte, dass notwendigerweise gilt, dass

$$1 = \sum_{x_1=1}^{3} \sum_{x_2=1}^{4} p_\xi(x_1, x_2) = \sum_{x_1=1}^{3} p_{\xi_1}(x_1) \text{ und } 1 = \sum_{x_2=1}^{4} \sum_{x_1=1}^{3} p_\xi(x_1, x_2) = \sum_{x_2=1}^{4} p_{\xi_2}(x_2) \qquad (14)$$

dass aus der Normiertheit von p_ξ die Normiertheit von p_{ξ_1} und p_{ξ_2} also direkt folgt.

Beispiel (Marginale Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen)

Ein Realisierungsbeispiel mithilfe relativer Häufigkeiten mag den Begriff der marginalen WMF intuitiv verdeutlichen. Nehmen wir an, wir hätten $n = 100$ (unabhängige) Realisierungen von ξ vorliegen.

Um die Wahrscheinlichkeiten $p_\xi(x_1, x_2)$ zu schätzen, würden wir die Anzahl der Realisierungen von (x_1, x_2) zählen und durch n teilen. Hätten wir beispielsweise 12 Realisierungen von $(3, 2)$ vorliegen, so würden wir $p_\xi(3, 2) \approx 12/100 = 0.12$ schätzen.

Die Frage nach der marginalen Wahrscheinlichkeit von $x_2 = 2$ entspräche dann der Frage, wie oft unter den Realisierungen zu finden sind, bei denen $x_2 = 2$ ist, irrespektive des Wertes von x_1. Dies wäre gerade die Anzahl der Realisierungen der Form $(1, 2), (2, 2)$ und $(3, 2)$. Gäbe es von diesen beispielsweise $0, 22$ und 12 respektive, so würde man die Wahrscheinlichkeit $p_{\xi_2}(2)$ natürlicherweise durch

$$\frac{0 + 22 + 12}{100} = \frac{0}{100} + \frac{22}{100} + \frac{12}{100} = 0.00 + 0.22 + 0.12 = 0.34 \tag{15}$$

schätzen. Anstelle der Wahrscheinlichkeiten $p_\xi(1, 2)$, $p_\xi(2, 2)$, $p_\xi(3, 2)$ addiert man hier also die entsprechenden relativen Häufigkeiten.

Bedingte Verteilungen

Vorbemerkungen

Wir erinnern uns, dass für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$ die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B definiert ist als

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{16}$$

Analog wird für zwei Zufallsvariablen ξ_1, ξ_2 mit Ereignisräumen $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ und (messbaren) Mengen $S_1 \in \mathcal{X}_1, S_2 \in \mathcal{X}_2$ die bedingte Verteilung von ξ_1 gegeben ξ_2 mithilfe der Ereignisse

$$A := \{\xi_1 \in S_1\} \text{ und } B := \{\xi_2 \in S_2\} \tag{17}$$

definiert.

So ergibt sich zum Beispiel die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass $\xi_1 \in S_1$ gegeben dass $\xi_2 \in S_2$ unter der Annahme, dass $\mathbb{P}(\{\xi_2 \in S_2\}) > 0$, zu

$$\mathbb{P}(\{\xi_1 \in S_1\}|\{\xi_2 \in S_2\}) = \frac{\mathbb{P}(\{\xi_1 \in S_1\} \cap \{\xi_2 \in S_2\})}{\mathbb{P}(\{\xi_2 \in S_2\})}. \tag{18}$$

Wir betrachten zunächst durch WMFen/WDFen zweidimensionaler Zufallsvektoren definierte bedingte Verteilungen.

Definition (Bedingte WMF, diskrete bedingte Verteilung)

$\xi := (\xi_1, \xi_2)$ sei ein diskreter Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, WMF $p_\xi = p_{\xi_1,\xi_2}$ und marginalen WMFen p_{ξ_1} und p_{ξ_2}. Die bedingte WMF von ξ_1 gegeben $\xi_2 = x_2$ ist dann für $p_{\xi_2}(x_2) > 0$ definiert als

$$p_{\xi_1|\xi_2=x_2} : \mathcal{X}_1 \to [0,1], x_1 \mapsto p_{\xi_1|\xi_2=x_2}(x_1|x_2) := \frac{p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)}{p_{\xi_2}(x_2)} \tag{19}$$

Analog ist für $p_{\xi_1}(x_1) > 0$ die bedingte WMF von ξ_2 gegeben $\xi_1 = x_1$ definiert als

$$p_{\xi_2|\xi_1=x_1} : \mathcal{X}_2 \to [0,1], x_2 \mapsto p_{\xi_2|\xi_1=x_1}(x_2|x_1) := \frac{p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)}{p_{\xi_1}(x_1)} \tag{20}$$

Die bedingten Verteilungen mit WMFen $p_{\xi_1|\xi_2=x_2}$ und $p_{\xi_2|\xi_1=x_1}$ heißen dann die *diskreten bedingten Verteilungen von ξ_1 gegeben $\xi_2 = x_2$ und ξ_2 gegeben $\xi_1 = x_1$*, respektive.

Bemerkungen

- In Analogie zur Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit von Ereignissen gilt also

$$p_{\xi_1|\xi_2}(x_1|x_2) = \frac{p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)}{p_{\xi_2}(x_2)} = \frac{\mathbb{P}(\{\xi_1 = x_1\} \cap \{\xi_2 = x_2\})}{\mathbb{P}(\{\xi_2 = x_2\})}. \tag{21}$$

- Bedingte Verteilungen sind (lediglich) normalisierte gemeinsame Verteilungen.

Beispiel (Bedingte Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen)

Wir betrachten erneut den zweidimensionalen Zufallsvektor $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ der Werte in $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ annimmt, wobei $\mathcal{X}_1 := \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{X}_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ seien.

Basierend auf der oben definierten WMF und den entsprechenden oben evaluierten marginalen WMFen ergeben sich folgende bedingte WMFen für $p_{\xi_2|\xi_1 = x_1}$

$p_{\xi_2\vert\xi_1}(x_2\vert x_1)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$
$p_{\xi_2\vert\xi_1=1}(x_2\vert x_1 = 1)$	$\frac{0.1}{0.4} = 0.25$	$\frac{0.0}{0.4} = 0.00$	$\frac{0.2}{0.4} = 0.50$	$\frac{0.1}{0.4} = 0.25$
$p_{\xi_2\vert\xi_1=2}(x_2\vert x_1 = 2)$	$\frac{0.1}{0.3} = 0.3\bar{3}$	$\frac{0.2}{0.3} = 0.6\bar{6}$	$\frac{0.0}{0.3} = 0.00$	$\frac{0.0}{0.3} = 0.00$
$p_{\xi_2\vert\xi_1=3}(x_2\vert x_1 = 3)$	$\frac{0.0}{0.3} = 0.00$	$\frac{0.1}{0.3} = 0.3\bar{3}$	$\frac{0.1}{0.3} = 0.3\bar{3}$	$\frac{0.1}{0.3} = 0.3\bar{3}$

Bemerkungen

- Man beachte, dass $\sum_{x_2=1}^{4} p_{\xi_2|\xi_1=x_1}(x_2|x_1) = 1$ für alle $x_1 \in \mathcal{X}_1$.
- Man beachte die qualitative Ähnlichkeit der WMFen $p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)$ und $p_{\xi_2|\xi_1}(x_2|x_1)$.
- Bedingte Verteilungen sind (lediglich) normalisierte gemeinsame Verteilungen.

Definition (Bedingte WDF, kontinuierliche bedingte Verteilungen)

$\xi := (\xi_1, \xi_2)$ sei ein kontinuierlicher Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathbb{R}^2$, WDF $p_\xi = p_{\xi_1,\xi_2}$ und marginalen WDFen p_{ξ_1} und p_{ξ_2}. Die bedingte WDF von ξ_1 gegeben $\xi_2 = x_2$ ist dann für $p_{\xi_2}(x_2) > 0$ definiert als

$$p_{\xi_1|\xi_2=x_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x_1 \mapsto p_{\xi_1|\xi_2=x_2}(x_1|x_2) := \frac{p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)}{p_{\xi_2}(x_2)} \tag{22}$$

Analog ist für $p_{\xi_1}(x_1) > 0$ die bedingte WMF von ξ_2 gegeben $\xi_1 = x_1$ definiert als

$$p_{\xi_2|\xi_1=x_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x_2 \mapsto p_{\xi_2|\xi_1=x_2}(x_2|x_1) := \frac{p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)}{p_{\xi_1}(x_1)} \tag{23}$$

Die Verteilungen mit WDFen $p_{\xi_1|\xi_2=x_2}$ und $p_{\xi_2|\xi_1=x_1}$ heißen dann die *kontinuierlichen bedingten Verteilungen von ξ_1 gegeben $\xi_2 = x_2$ und ξ_2 gegeben $\xi_1 = x_1$*, respektive.

Bemerkung

- Im kontinuierlichen Fall gilt zwar $\mathbb{P}(\xi = x) = 0$, aber nicht notwendig auch $p_\xi(x) = 0$.

Definition

Multivariate Verteilungen

Marginalverteilungen

Bedingte Verteilungen

Unabhängige Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

Definition (Unabhängige Zufallsvariablen)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ ein zweidimensionaler Zufallsvektor. Die Zufallsvariablen ξ_1, ξ_2 mit Ergebnisräumen $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ heißen *unabhängig*, wenn für alle $S_1 \subseteq \mathcal{X}_1$ und $S_2 \subseteq \mathcal{X}_2$ gilt, dass

$$\mathbb{P}_\xi(\xi_1 \in S_1, \xi_2 \in S_2) = \mathbb{P}_{\xi_1}(\xi_1 \in S_1)\mathbb{P}_{\xi_2}(\xi_2 \in S_2). \tag{24}$$

Bemerkungen

- Die Definition besagt, dass die Ereignisse $\{\xi_1 \in S_1\}$ und $\{\xi_2 \in S_2\}$ unabhängig sind.
- Es gilt also auch, dass $\mathbb{P}(\{\xi_1 \in S_1\})|\{\xi_2 \in S_2\}) = \mathbb{P}(\{\xi_1 \in S_1\})$.
- Wissen um das Ereignis $\{\xi_2 \in S_2\}$ verändert die Wahrscheinlichkeit von $\{\xi_1 \in S_1\}$ nicht.
- Einen formaleren Zugang bietet das Konzept der *Produktwahrscheinlichkeitsräume*.

Theorem (Unabhängigkeit und Faktorisierung der WMF/WDF)

(1) $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ sei ein diskreter Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, WMF p_ξ und marginalen WMFen p_{ξ_1}, p_{ξ_2}. Dann gilt

$$\xi_1 \text{ und } \xi_2 \text{ sind unabhängige Zufallsvariablen} \Leftrightarrow$$
$$p_\xi(x_1, x_2) = p_{\xi_1}(x_1) p_{\xi_2}(x_2) \text{ für alle } (x_1, x_2) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2. \quad (25)$$

(2) $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ sei ein kontinuierlicher Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathbb{R}^2$, WDF p_ξ und marginalen WDFen p_{ξ_1}, p_{ξ_2}. Dann gilt

$$\xi_1 \text{ und } \xi_2 \text{ sind unabhängige Zufallsvariablen} \Leftrightarrow$$
$$p_\xi(x_1, x_2) = p_{\xi_1}(x_1) p_{\xi_2}(x_2) \text{ für alle } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (26)$$

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Die Produkteigenschaft $p_\xi(x_1, x_2) = p_{\xi_1}(x_1) p_{\xi_2}(x_2)$ heißt auch *Faktorisierung*.
- Unabhängigkeit zweier ZVen entspricht der Faktorisierung ihrer gemeinsamen WMF/WDF.

Beispiel (Unabhängige diskrete Zufallsvariablen)

Wir betrachten erneut den zweidimensionalen Zufallsvektor $\xi := (\xi_1, \xi_2)$, der Werte in $\{1,2,3\} \times \{1,2,3,4\}$ annimmt, und dessen gemeinsame und marginale WMFen die untenstehende Form haben

$p_\xi(x_1,x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$p_{\xi_1}(x_1)$
$x_1 = 1$	0.10	0.00	0.20	0.10	0.40
$x_1 = 2$	0.10	0.20	0.00	0.00	0.30
$x_1 = 3$	0.00	0.10	0.10	0.10	0.30
$p_{\xi_2}(x_2)$	0.20	0.30	0.30	0.20	

Da hier gilt, dass

$$p_\xi(1,1) = 0.10 \neq 0.08 = 0.40 \cdot 0.20 = p_{\xi_1}(1)p_{\xi_2}(1) \tag{27}$$

sind die Zufallsvariablen ξ_1 und ξ_2 nicht unabhängig.

Unabhängige Zufallsvariablen

Beispiel (Unabhängige diskrete Zufallsvariablen)

Die gemeinsame Verteilung von ξ_1 und ξ_2 unter der Annahme der Unabhängigkeit von ξ_1 und ξ_2 bei gleichen Marginalverteilungen ergibt sich zu

$p_\xi(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$p_{\xi_1}(x_1)$
$x_1 = 1$	0.08	0.12	0.12	0.08	0.40
$x_1 = 2$	0.06	0.09	0.09	0.06	0.30
$x_1 = 3$	0.06	0.09	0.09	0.06	0.30
$p_{\xi_2}(x_2)$	0.20	0.30	0.30	0.20	

Weiterhin ergeben sich im Falle der Unabhängigkeit von ξ_1 und ξ_2 zum Beispiel die bedingten Wahrscheinlichkeitsmassefunktion $p_{\xi_2|\xi_1}$ zu

$p_{\xi_1\|\xi_2}(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$
$p_{\xi_2\|\xi_1=1}(x_2\|x_1 = 1)$	$\frac{0.08}{0.40} = 0.2$	$\frac{0.12}{0.40} = 0.3$	$\frac{0.12}{0.40} = 0.3$	$\frac{0.08}{0.40} = 0.2$
$p_{\xi_2\|\xi_1=2}(x_2\|x_1 = 2)$	$\frac{0.06}{0.30} = 0.2$	$\frac{0.09}{0.30} = 0.3$	$\frac{0.09}{0.30} = 0.3$	$\frac{0.06}{0.30} = 0.2$
$p_{\xi_2\|\xi_1=3}(x_2\|x_1 = 3)$	$\frac{0.06}{0.30} = 0.2$	$\frac{0.09}{0.30} = 0.3$	$\frac{0.09}{0.30} = 0.3$	$\frac{0.06}{0.30} = 0.2$

Im Falle der Unabhängigkeit von ξ_1 und ξ_2 ändert sich die Verteilung von ξ_2 gegeben (oder im Wissen um) den Wert von ξ_1 also nicht und entspricht jeweils der Marginalverteilung von ξ_2. Dies entspricht natürlich der Intuition der Unabhängigkeit von Ereignissen im Kontext elementarer Wahrscheinlichkeiten.

Definition (n unabhängige Zufallsvariablen)

$\xi := (\xi_1, ..., \xi_n)$ sei ein n-dimensionaler Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathcal{X} = \times_{i=1}^n \mathcal{X}_i$. Die n Zufallsvariablen $\xi_1, ..., \xi_n$ heißen *unabhängig*, wenn für alle $S_i \subseteq \mathcal{X}_i, i = 1, ..., n$ gilt, dass

$$\mathbb{P}_\xi(\xi_1 \in S_1, ..., \xi_n \in S_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{\xi_i}(\xi_i \in S_i). \tag{28}$$

Wenn der Zufallsvektor eine n-dimensionale WMF oder WDF p_ξ mit marginalen WMFen oder WDFen $p_{\xi_i}, i = 1, ..., n$ besitzt, dann ist die Unabhängigkeit von $\xi_1, ..., \xi_n$ gleichbedeutend mit der Faktorisierung der gemeinsamen WMF oder WDF, also mit

$$p_\xi(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^n p_{\xi_i}(x_i). \tag{29}$$

Bemerkung

- Es handelt sich um eine direkte Generalisierung des zweidimensionalen Falls.

Unabhängige Zufallsvariablen

Definition (Unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen)

n Zufallsvariablen $\xi_1, ..., \xi_n$ heißen *unabhängig und identisch verteilt (u.i.v.)*, wenn

(1) $\xi_1, ..., \xi_n$ unabhängige Zufallsvariablen sind, und

(2) die Marginalverteilungen der ξ_i übereinstimmen, also gilt, dass

$$\mathbb{P}_{\xi_i} = \mathbb{P}_{\xi_j} \text{ für alle } 1 \le i, j \le n. \tag{30}$$

Wenn die Zufallsvariablen $\xi_1, ..., \xi_n$ unabhängig und identisch verteilt sind und die $i$te Marginalverteilung $\mathbb{P}_\xi := \mathbb{P}_{\xi_i}$ ist, so schreibt man auch

$$\xi_1, ..., \xi_n \sim \mathbb{P}_\xi. \tag{31}$$

Bemerkungen

- Man sagt kurz, dass $\xi_1, \ldots, \xi_n$ u.i.v. sind.
- Im Englischen spricht man von *independent and identically distributed (i.i.d)* Zufallsvariablen.
- In der Statistik werden Fehlerterme meist durch u.i.v. Zufallsvariablen modelliert.
- n u.i.v. normalverteilte ZVen werden als $\xi_1, \ldots, \xi_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ geschrieben.

Definition

Multivariate Verteilungen

Marginalverteilungen

Bedingte Verteilungen

Unabhängige Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie die Definition des Begriffs des Zufallsvektors wieder.
2. Geben Sie die Definition des Begriffs der multivariaten Verteilung eines Zufallsvektors wieder.
3. Geben Sie die Definition des Begriffs der multivariaten WMF wieder.
4. Geben Sie die Definition des Begriffs der multivariaten WDF wieder.
5. Geben Sie die Definition des Begriffs der univariaten Marginalverteilung eines Zufallsvektors wieder
6. Wie berechnet man die WMF der $i$ten Komponente eines diskreten Zufallsvektors?
7. Wie berechnet man die WDF der $i$ten Komponente eines kontinuierlichen Zufallsvektors?
8. Geben Sie die Definition des Begriffs der Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen wieder.
9. Wie erkennt man an der gemeinsamen WMF oder WDF eines zweidimensionalen Zufallsvektors, ob die Komponenten des Zufallsvektors unabhängig sind oder nicht?
10. Geben Sie die Definition des Begriffs der Unabhängigkeit von n Zufallsvariablen wieder.
11. Geben Sie die Definition des Begriffs der unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen wieder.

Selbstkontrollfragen - Lösungen

1. Siehe Definition (Zufallsvektor).
2. Siehe Definition (Multivariate Verteilung).
3. Siehe Definition (Diskreter Zufallsvektor, Multivariate WMF).
4. Siehe Definition (Kontinuierlicher Zufallsvektor, Multivariate WDF).
5. Siehe Definition (Univariate Marginalverteilung).
6. Siehe Theorem (Marginale Wahrscheinlichkeitsmasse- und -dichtefunktionen). Man erhält die WMF der $i$ten Komponente eines diskreten Zufallsvektors durch Summation der Werte der WMF des Zufallsvektors über alle Komponenten des Zufallsvektors *außer* der $i$ten Komponente.
7. Siehe Theorem (Marginal Wahrscheinlichkeitsmasse- und dichtefunktionen). Man erhält die WDF der $i$ten Komponente eines kontinuierlichen Zufallsvektors durch Integration der Werte der WDF des Zufallsvektors über alle Komponenten des Zufallsvektors *außer* der $i$ten Komponente.
8. Siehe Definition (Unabhängige Zufallsvariablen).
9. Man prüft, ob sich alle Werte der gemeinsamen WMF oder WDF $p_\xi(x_1, x_2)$ des Zufallsvektors $\xi(\xi_1, \xi_2)$ durch Multiplikation der entsprechenden marginalen WMF oder WDF Werte $p_{\xi_1}(x_1)$ und $p_{\xi_2}(x_2)$ ergeben. Ist dies für alle Werte $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ der Fall, so sind ξ_1 und ξ_2 unabhängig, ist dies nicht für alle Werte $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, so sind ξ_1 und ξ_2 nicht unabhängig.
10. Siehe Definition (n unabhängige Zufallsvariablen).
11. Siehe Definition (Unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen).