Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2024/25

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(3) Zufallsvariablen

Konstruktion, Definition, Notation, Intuition

Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Kumulative Verteilungsfunktionen

Selbstkontrollfragen

Konstruktion, Definition, Notation, Intuition

Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Kumulative Verteilungsfunktionen

Selbstkontrollfragen

Konstruktion von Zufallsvariablen und Verteilungen

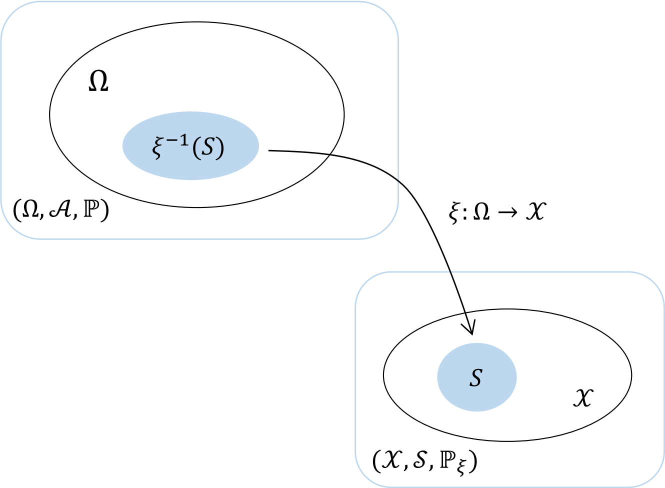
- Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\xi : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Abbildung.
- ξ ist das kleine griechische Xi.
- Es sei $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra auf $\mathcal{X}$.
- Für jedes $S \in \mathcal{S}$ sei das *Urbild von S* definiert als

$$\xi^{-1}(S) := \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\}. \tag{1}$$

- Wenn $\xi^{-1}(S) \in \mathcal{A}$ für alle $S \in \mathcal{S}$ gilt, dann heißt ξ *messbar*.
- $\xi : \Omega \to \mathcal{X}$ sei messbar. Allen $S \in \mathcal{S}$ kann die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}_\xi : \mathcal{S} \to [0,1], S \mapsto \mathbb{P}_\xi(S) := \mathbb{P}\left(\xi^{-1}(S)\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\}\right) \tag{2}$$

  zugeordnet werden.
- ξ heißt nun *Zufallsvariable* und $\mathbb{P}_\xi$ heißt *Bildmaß* oder *Verteilung von ξ*.
- $(\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathbb{P}_\xi)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum.
- Mit $\mathcal{X} := \mathbb{R}$ und $\mathcal{S} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$ rückt der Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_\xi)$ ins Zentrum.



$$\mathbb{P}\left(\xi^{-1}(S)\right) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\}) =: \mathbb{P}_\xi(S)$$

Definition (Zufallsvariable)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ ein *Messraum*. Dann ist eine *Zufallsvariable (ZV)* definiert als eine Abbildung $\xi : \Omega \to \mathcal{X}$ mit der *Messbarkeitseigenschaft*

$$\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\} \in \mathcal{A} \text{ für alle } S \in \mathcal{S}. \tag{3}$$

Bemerkungen

- ZVen sind weder "zufällig" noch "Variablen".
- Intuitiv wird $\omega \in \Omega$ "zufällig" anhand von $\mathbb{P}$ gezogen und $\xi(\omega)$ realisiert.
- Wir nennen $\mathcal{X}$ den *Ergebnisraum der ZV* ξ.
- Die Verteilungen (Bildmaße) von ZVen sind in der Statistik zentral.
- Der Begriff der Verteilung wird oft auch für W-Maße und Dichten verwendet.

Konstruktion, Definition, Notation, Intuition

Beispiel (Summe eines roten und eines blauen Würfels)

- Für das Werfen eines roten und eines blauen Würfels ist ein sinnvolles W-Raummodell
  - $\Omega := \{(r,b)|r \in \mathbb{N}_6, b \in \mathbb{N}_6\}$
  - $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$.
  - $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ mit $\mathbb{P}(\{(r,b)\}) = \frac{1}{36}$ für alle $(r,b) \in \Omega$.
- Die Augenzahl-Summenbildung wird dann sinnvoller Weise durch die Zufallsvariable

$$\xi : \Omega \to \mathcal{X}, (r,b) \mapsto \xi((r,b)) := r + b. \tag{4}$$

  beschrieben, wobei $\mathcal{X} := \{2, 3, ..., 12\}$.
- $\mathcal{S} := \mathcal{P}(\mathcal{X})$ ist eine sinnvolle σ-Algebra auf $\mathcal{X}$.
- Mithilfe der σ-Addivität von $\mathbb{P}$ können wir die Verteilung $\mathbb{P}_\xi$ von ξ für alle Elementarereignisse $\{x\} \in \mathcal{S}$ berechnen, wie auf der nächsten Folie gezeigt.
- Wir haben damit ein weiteres Wahrscheinlichkeitsraum-Modell $(\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathbb{P}_\xi)$ konstruiert.

Beispiel (Summe eines roten und eines blauen Würfels)

Bestimmung der Verteilung $\mathbb{P}_\xi$ von ξ durch Bestimmung der Elementarereigniswahrscheinlichkeiten

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_\xi(\{2\}) &= \mathbb{P}\left(\xi^{-1}(\{2\})\right) &&= \mathbb{P}\left(\{(1,1)\}\right) &&= \tfrac{1}{36}\\
\mathbb{P}_\xi(\{3\}) &= \mathbb{P}\left(\xi^{-1}(\{3\})\right) &&= \mathbb{P}\left(\{(1,2),(2,1)\}\right) &&= \tfrac{2}{36}\\
\mathbb{P}_\xi(\{4\}) &= \mathbb{P}\left(\xi^{-1}(\{4\})\right) &&= \mathbb{P}\left(\{(1,3),(3,1),(2,2)\}\right) &&= \tfrac{3}{36}\\
\mathbb{P}_\xi(\{5\}) &= \mathbb{P}\left(\xi^{-1}(\{5\})\right) &&= \mathbb{P}\left(\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}\right) &&= \tfrac{4}{36}\\
\mathbb{P}_\xi(\{6\}) &= \mathbb{P}\left(\xi^{-1}(\{6\})\right) &&= \mathbb{P}\left(\{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}\right) &&= \tfrac{5}{36}\\
\mathbb{P}_\xi(\{7\}) &= \mathbb{P}\left(\xi^{-1}(\{7\})\right) &&= \mathbb{P}\left(\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}\right) &&= \tfrac{6}{36}\\
\mathbb{P}_\xi(\{8\}) &= \mathbb{P}\left(\xi^{-1}(\{8\})\right) &&= \mathbb{P}\left(\{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}\right) &&= \tfrac{5}{36}\\
\mathbb{P}_\xi(\{9\}) &= \mathbb{P}\left(\xi^{-1}(\{9\})\right) &&= \mathbb{P}\left(\{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)\}\right) &&= \tfrac{4}{36}\\
\mathbb{P}_\xi(\{10\}) &= \mathbb{P}\left(\xi^{-1}(\{10\})\right) &&= \mathbb{P}\left(\{(4,6),(6,4),(5,5)\}\right) &&= \tfrac{3}{36}\\
\mathbb{P}_\xi(\{11\}) &= \mathbb{P}\left(\xi^{-1}(\{11\})\right) &&= \mathbb{P}\left(\{(5,6),(6,5)\}\right) &&= \tfrac{2}{36}\\
\mathbb{P}_\xi(\{12\}) &= \mathbb{P}\left(\xi^{-1}(\{12\})\right) &&= \mathbb{P}\left(\{(6,6)\}\right) &&= \tfrac{1}{36}
\end{aligned}
$$

Definition (Notation für Zufallsvariablen)

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $(\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathbb{P}_\xi)$ Wahrscheinlichkeitsräume und $\xi : \Omega \to \mathcal{X}$ sei eine Zufallsvariable. Dann gelten mit $S \in \mathcal{S}$ und $x \in \mathcal{X}$ folgende Notationskonventionen für Ereignisse in $\mathcal{A}$:

$$\{\xi \in S\} := \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\}$$
$$\{\xi = x\} := \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) = x\}$$
$$\{\xi \le x\} := \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \le x\}$$
$$\{\xi < x\} := \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) < x\}$$
$$\{\xi \ge x\} := \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \ge x\}$$
$$\{\xi > x\} := \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) > x\}$$

Aus diesen Konventionen ergeben sich folgende Konventionen für Wahrscheinlichkeiten von Verteilungen

$$\mathbb{P}_\xi(\xi \in S) = \mathbb{P}(\{\xi \in S\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\})$$
$$\mathbb{P}_\xi(\xi = x) = \mathbb{P}(\{\xi = x\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) = x\})$$
$$\mathbb{P}_\xi(\xi \le x) = \mathbb{P}(\{\xi \le x\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \le x\})$$
$$\mathbb{P}_\xi(\xi < x) = \mathbb{P}(\{\xi < x\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) < x\})$$
$$\mathbb{P}_\xi(\xi \ge x) = \mathbb{P}(\{\xi \ge x\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \ge x\})$$
$$\mathbb{P}_\xi(\xi > x) = \mathbb{P}(\{\xi < x\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) > x\})$$

Oft wird zudem auf das Subskript bei Verteilungssymbolen verzichtet und zum Beispiel $\mathbb{P}_\xi(\xi \in S)$ nur als $\mathbb{P}(\xi \in S)$ geschrieben, solange sich aus dem Kontext keine Verwechselungsmöglichkeit ergeben kann.

Definition (Realisierung einer Zufallsvariable)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ sei ein Messraum und $\xi : \Omega \to \mathcal{X}$ sei eine Zufallsvariable. Dann heißt $\xi(\omega) \in \mathcal{X}$ auch *Realisierung der Zufallvariable*.

- In der Datenanalyse werden Daten typischerweise als Realisierungen von Zufallsvariablen modelliert.
- Da die Auswahl eines $\omega \in \Omega$ in einem Zufallsvorgang zufällig ist, erscheint $\xi(\omega)$ zufällig.

Simulation von Zufallsvariablenrealisierungen (Summe zweier Würfel)

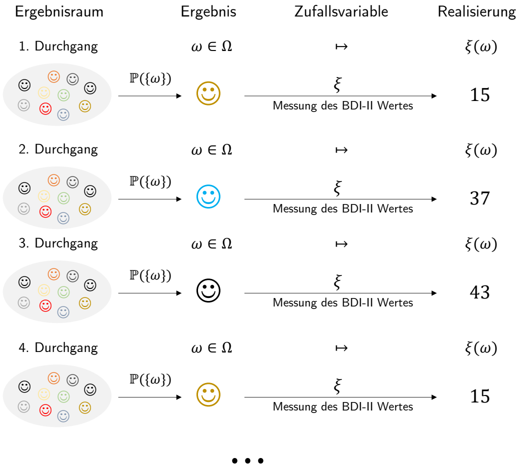
```r
# Wahrscheinlichkeitsraummodell
Omega    = list()                                 # Ergebnisrauminitialisierung
idx      = 1                                      # Ergebnisindexinitialisierung
for(r in 1:6){                                    # Ergebnisse roter  Würfel
    for(b in 1:6){                                # Ergebnisse blauer Würfel
        Omega[[idx]] = c(r,b)                     # \omega \in \Omega
        idx          = idx + 1 }}                 # Ergebnisindexupdate
K        = length(Omega)                          # Kardinalität von \Omega
pi       = rep(1/K,1,K)                           # Wahrscheinlichkeitsfunktion \pi

# Zufallsvorgang
omega    = Omega[[which(rmultinom(1,1,pi) == 1)]] # Auswahl von \omega anhand \mathbb{P}({\omega})

# Auswertung der Zufallsvariable
xi_omega = sum(omega)                             # \xi(\omega)
```

```
omega     :  2 4
xi(omega) :  6
```

Zufallsvariablen als Modelle von Messvorgängen



Konstruktion, Definition, Notation, Intuition

Theorem (Arithmetik reeller Zufallsvariablen)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sei der reelle Messraum, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\upsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ seien reellwertige Zufallsvariablen und $c \in \mathbb{R}$ sei eine Konstante. Weiterhin seien

$$
\begin{aligned}
\xi + c : \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto (\xi + c)(\omega) &:= \xi(\omega) + c \text{ für } c \in \mathbb{R} \\
c\xi : \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto (c\xi)(\omega) &:= c\xi(\omega) \text{ für } c \in \mathbb{R} \\
\xi + \upsilon : \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto (\xi + \upsilon)(\omega) &:= \xi(\omega) + \upsilon(\omega) \\
\xi\upsilon : \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto (\xi\upsilon)(\omega) &:= \xi(\omega)\upsilon(\omega)
\end{aligned} \tag{5}
$$

die Addition einer Konstante zu einer reellwertigen Zufallsvariable, die Multiplikation einer reellwertigen Zufallsvariable mit einer Konstante, die Addition zweier reellwertiger Zufallsvariablen und die Multiplikation zweier reellwertigen Zufallsvariablen, respektive. Dann sind auch $\xi + c$, $c\xi$, $\xi + \upsilon$ und $\xi\upsilon$ reellwertige Zufallsvariablen.

Bemerkungen

- Intuitiv ergibt die Addition einer zufälligen Größe zu einer konstanten Größe eine zufällige Größe.
- Intuitiv ergibt die Multiplikation einer zufälligen Größe mit einer Konstante eine zufällige Größe.
- Intuitiv ergibt die Addition zweier zufälliger Größen wiederum eine zufällige Größe.
- Intuitiv ergibt die Multiplikation zweier zufälliger Größen wiederum eine zufällige Größe.
- Für einen Beweis, siehe zum Beispiel Hesse (2009), Seite 33-34.

Konstruktion, Definition, Notation, Intuition

Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Kumulative Verteilungsfunktionen

Selbstkontrollfragen

Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen

Definition (Diskrete ZV, Wahrscheinlichkeitsmassefunktion)

Eine Zufallsvariable ξ heißt *diskret*, wenn ihr Ergebnisraum $\mathcal{X}$ endlich oder abzählbar ist und eine Funktion der Form

$$p : \mathcal{X} \to [0,1], x \mapsto p(x) \tag{6}$$

existiert, für die gilt

(1) $\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1$ und

(2) $\mathbb{P}_\xi(\xi = x) = p(x)$ für alle $x \in \mathcal{X}$.

Eine entsprechende Funktion p heißt *Wahrscheinlichkeitsmassefunktion (WMF)* von ξ.

Bemerkungen

- Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie bijektiv auf $\mathbb{N}$ abgebildet werden kann.
- WMFen heißen im Deutschen auch *W-Funktionen* oder *Zähldichten*.
- WMFen heißen auf Englisch *probability mass functions (PMFs)*.
- Die Eigenschaft $\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1$ nennt man auch *Normiertheit* von p.
- Zur Parallelität mit PMFs und WDFs bevorzugen wird den Begriff WMF.

Definition (Bernoulli-Zufallsvariable)

Es sei ξ eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathcal{X} := \{0,1\}$ und WMF

$$p : \mathcal{X} \to [0,1], x \mapsto p(x) := \mu^x(1-\mu)^{1-x} \text{ mit } \mu \in [0,1]. \tag{7}$$

Dann sagen wir, dass ξ einer *Bernoulli-Verteilung mit Parameter* $\mu \in [0,1]$ unterliegt und nennen ξ eine *Bernoulli-Zufallsvariable*. Wir kürzen dies mit $\xi \sim \text{Bern}(\mu)$ ab. Die WMF einer Bernoulli-Zufallsvariable bezeichnen wir mit

$$\text{Bern}(x;\mu) := \mu^x(1-\mu)^{1-x}. \tag{8}$$

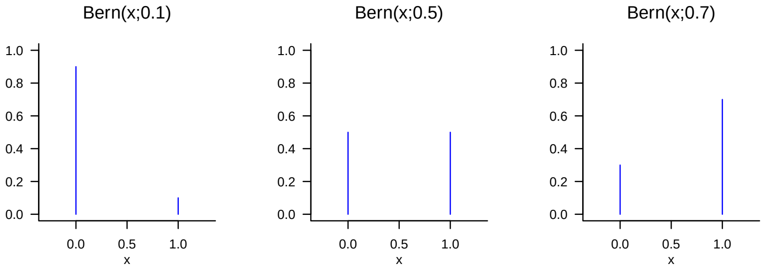
Bemerkungen

- Eine Bernoulli-Zufallsvariable kann als Modell eines Münzwurfs dienen.
- μ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ξ den Wert 1 annimmt,

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = \mu^1(1-\mu)^{1-1} = \mu. \tag{9}$$

© 2025 Dirk Ostwald CC BY 4.0

Bernoulli-Zufallsvariable



 © 2025 Dirk Ostwald CC BY 4.0

Definition (Binomial-Zufallsvariable)

Es sei ξ eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathcal{X} := \mathbb{N}_n^0$ und WMF

$$p : \mathcal{X} \to [0,1], x \mapsto p(x) := \binom{n}{x} \mu^x (1-\mu)^{n-x} \text{ für } \mu \in [0,1]. \quad (10)$$

Dann sagen wir, dass ξ einer *Binomialverteilung mit Parametern* $\mu \in [0,1]$ *und* $n \in \mathbb{N}$ unterliegt und nennen ξ eine Binomial-Zufallsvariable. Wir kürzen dies mit $\xi \sim \text{Bin}(\mu, n)$ ab. Die WMF einer Binomial-Zufallsvariable bezeichnen wir mit

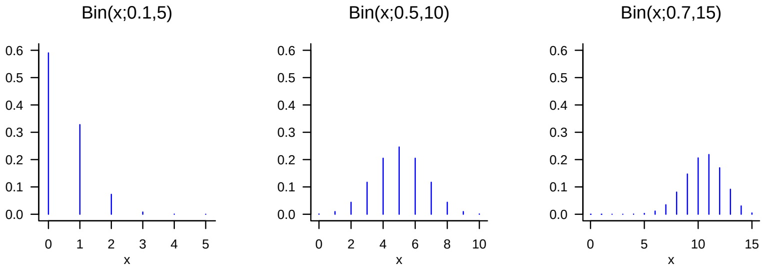
$$\text{Bin}(x; \mu, n) := \binom{n}{x} \mu^x (1-\mu)^{n-x}. \quad (11)$$

Bemerkung

- Es gilt $\text{Bin}(x; \mu, 1) = \text{Bern}(x; \mu)$.

Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen

Binomial-Zufallsvariable



Definition (Diskret-gleichverteilte Zufallsvariable)

Es sei ξ eine diskrete Zufallsvariable mit endlichem Ergebnisraum $\mathcal{X}$ und WMF

$$p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto p(x) := \frac{1}{|\mathcal{X}|}. \tag{12}$$

Dann sagen wir, dass ξ einer *diskreten Gleichverteilung* unterliegt und nennen ξ eine *diskret-gleichverteilte Zufallsvariable*. Wir kürzen dies mit $\xi \sim U(|\mathcal{X}|)$ ab. Die WMF einer diskret-gleichverteilten Zufallsvariable bezeichnen wir mit

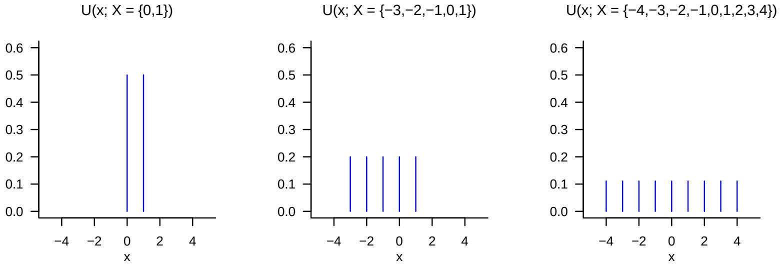
$$U(x; |\mathcal{X}|) := \frac{1}{|\mathcal{X}|}. \tag{13}$$

Bemerkungen

- Bern$(x; 0.5) = U(x; |\mathcal{X}|)$ für $\mathcal{X} = \{0, 1\}$.

Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen

Diskret-gleichverteilte Zufallsvariable



Konstruktion, Definition, Notation, Intuition

Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Kumulative Verteilungsfunktionen

Selbstkontrollfragen

Definition (Kontinuierliche ZV, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion)

Eine Zufallsvariable ξ heißt *kontinuierlich*, wenn $\mathbb{R}$ der Ergebnisraum von ξ ist und eine Funktion

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto p(x) \tag{14}$$

existiert, für die gilt

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$ und

(2) $\mathbb{P}_\xi(\xi \in [a,b]) = \int_a^b p(x)\, dx$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.

Eine entsprechende Funktion p heißt *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF)* von ξ.

Bemerkungen

- WDFen können Werte größer als 1 annehmen.
- Es gilt $\mathbb{P}_\xi(\xi = a) = \int_a^a p(x)\, dx = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$.
- Wahrscheinlichkeiten werden aus WDFen durch Integration berechnet.
- (Wahrscheinlichkeits)Masse $=$ (Wahrscheinlichkeits)Dichte $\times$ (Mengen)Volumen.

Definition (Normalverteilte und standardnormalverteilte Zufallsvariablen)

Es sei ξ eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathbb{R}$ und WDF

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto p(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right). \tag{15}$$

Dann sagen wir, dass ξ einer *Normalverteilung (oder Gauß-Verteilung) mit Parametern* $\mu \in \mathbb{R}$ *und* $\sigma^2 > 0$ unterliegt und nennen ξ eine *normalverteilte Zufallsvariable*. Wir kürzen dies mit $\xi \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ ab. Die WDF einer normalverteilten Zufallsvariable bezeichnen wir mit

$$N\left(x; \mu, \sigma^2\right) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right). \tag{16}$$

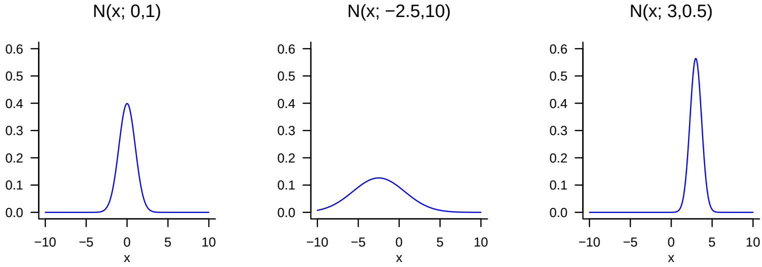
Eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ heißt *standardnormalverteilte Zufallsvariable* und wird oft als Z*-Zufallsvariable* bezeichnet.

Bemerkungen

- Der Parameter μ entspricht dem Wert höchster Wahrscheinlichkeitsdichte.
- Der Parameter σ^2 spezifiziert die Breite der WDF.

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Normalverteilte Zufallsvariablen



Definition (Gamma-Zufallsvariable)

Es sei ξ eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathcal{X} := \mathbb{R}_{>0}$ und WDF

$$p : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto p(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right), \tag{17}$$

wobei Γ die Gammafunktion bezeichne. Dann sagen wir, dass ξ einer *Gammaverteilung mit Formparameter* $\alpha > 0$ *und Skalenparameter* $\beta > 0$ unterliegt und nennen ξ eine *gammaverteilte Zufallsvariable*. Wir kürzen dies mit $\xi \sim G(\alpha, \beta)$ ab. Die WDF einer gammaverteilen Zufallsvariable bezeichnen wir mit

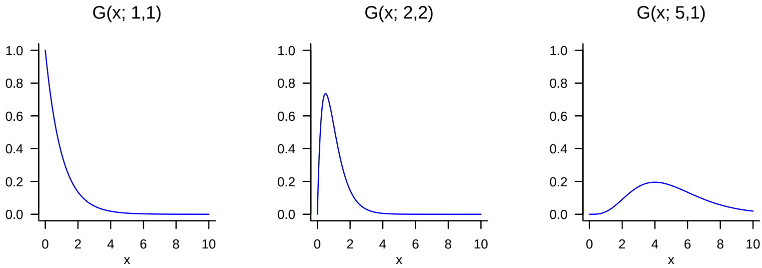
$$G(x; \alpha, \beta) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right). \tag{18}$$

Bemerkung

- $G\left(\frac{n}{2}, 2\right)$ heißt auch *Chi-Quadrat (χ^2) Verteilung mit n Freiheitsgraden*.

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Gamma-Zufallsvariablen



Definition (Beta-Zufallsvariable)

Es sei ξ eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathcal{X} := [0,1]$ und WDF

$$p : \mathcal{X} \to [0,1], x \mapsto p(x) := \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \text{ mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}, \tag{19}$$

wobei Γ die Gammafunktion bezeichne. Dann sagen wir, dass ξ einer *Beta-Verteilung* mit Parametern $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ unterliegt, und nennen ξ eine beta-verteilte Zufallsvariable. Wir kürzen dies mit $\xi \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ ab. Die WDF einer beta-verteilten Zufallsvariable bezeichnen wir mit

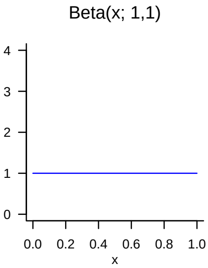
$$\text{Beta}(x; \alpha, \beta) := \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}. \tag{20}$$

Bemerkung

- Für $\alpha < 1, \beta < 1$ ist der Ergebnisraum $\mathcal{X} :=]0,1[$.

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Beta-Zufallsvariable



Definition (Gleichverteilte Zufallsvariable)

Es sei ξ eine kontinuierliche Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathbb{R}$ und WDF

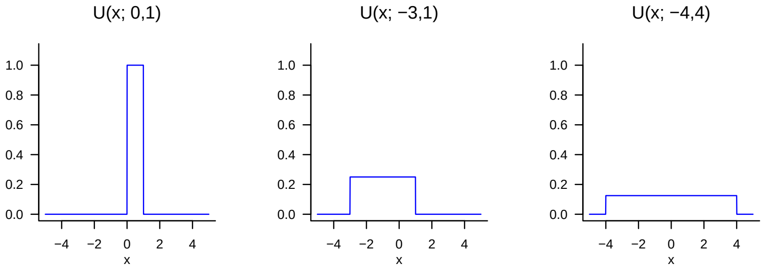
$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto p(x) := \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}. \quad (21)$$

Dann sagen wir, dass ξ einer *Gleichverteilung mit Parametern* a *und* b unterliegt und nennen ξ eine *gleichverteilte Zufallsvariable*. Wir kürzen dies mit $\xi \sim U(a,b)$ ab. Die WDF einer gleichverteilten Zufallsvariable bezeichnen wir mit

$$U(x; a, b) := \frac{1}{b-a}. \quad (22)$$

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Gleichverteilte Zufallsvariablen



Konstruktion, Definition, Notation, Intuition

Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Kumulative Verteilungsfunktionen

Selbstkontrollfragen

Definition (Kumulative Verteilungsfunktion)

Die *kumulative Verteilungsfunktion (KVF)* einer Zufallsvariable ξ ist definiert als

$$P : \mathbb{R} \to [0,1], x \mapsto P(x) := \mathbb{P}(\xi \le x). \tag{23}$$

Bemerkungen

- KVFen sind sowohl für diskrete als auch kontinuierliche ZVen definiert.
- $P(x)$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ definiert, auch wenn $x \notin \mathcal{X}$.
- Mithilfe von KVFen können Überschreitungs- und Intervallwahrscheinlichkeiten angegeben werden.

Theorem (Überschreitungswahrscheinlichkeit)

Es sei ξ eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathcal{X}$ und P ihre kumulative Verteilungsfunktion. Dann gilt für die *Überschreitungswahrscheinlichkeit* $\mathbb{P}(\xi > x)$, dass

$$\mathbb{P}(\xi > x) = 1 - P(x) \text{ für alle } x \in \mathcal{X}. \tag{24}$$

<u>Beweis</u>

Die Ereignisse $\{\xi > x\}$ und $\{\xi \le x\}$ sind disjunkt und

$$\Omega = \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) > x\} \cup \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \le x\} = \{\xi > x\} \cup \{\xi \le x\}. \tag{25}$$

Mit der σ-Additivität von $\mathbb{P}$ folgt dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Omega) &= 1 \\
\Leftrightarrow \mathbb{P}(\{\xi > x\} \cup \{\xi \le x\}) &= 1 \\
\Leftrightarrow \mathbb{P}(\{\xi > x\}) + \mathbb{P}(\{\xi \le x\}) &= 1 \\
\Leftrightarrow \mathbb{P}(\{\xi > x\}) &= 1 - \mathbb{P}(\{\xi \le x\}) \\
\Leftrightarrow \mathbb{P}(\{\xi > x\}) &= 1 - P(x).
\end{aligned} \tag{26}$$

$\square$

© 2025 Dirk Ostwald CC BY 4.0

Theorem (Intervallwahrscheinlichkeiten)

Es sei ξ eine Zufallsvariable mit Ereignisraum $\mathcal{X}$ und P ihre kumulative Verteilungsfunktion. Dann gilt für die *Intervallwahrscheinlichkeit* $\mathbb{P}(\xi \in]x_1, x_2])$, dass

$$\mathbb{P}(\xi \in]x_1, x_2]) = P(x_2) - P(x_1) \text{ für alle } x_1, x_2 \in \mathcal{X} \text{ mit } x_1 < x_2. \tag{27}$$

<u>Beweis</u>

Wir betrachten die Ereignisse $\{\xi \le x_1\}$,$\{x_1 < \xi \le x_2\}$ und $\{\xi \le x_2\}$, wobei

$$\{\xi \le x_1\} \cap \{x_1 < \xi \le x_2\} = \emptyset \text{ und } \{\xi \le x_1\} \cup \{x_1 < \xi \le x_2\} = \{\xi \le x_2\}. \tag{28}$$

gelten. Mit der σ-Additivität von $\mathbb{P}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\{\xi \le x_1\} \cup \{x_1 < \xi \le x_2\}) = \mathbb{P}(\{\xi \le x_2\}) \\
\Leftrightarrow\ & \mathbb{P}(\{\xi \le x_1\}) + \mathbb{P}(\{x_1 < \xi \le x_2\}) = \mathbb{P}(\{\xi \le x_2\}) \\
\Leftrightarrow\ & \mathbb{P}(\{x_1 < \xi \le x_2\}) = \mathbb{P}(\{\xi \le x_2\}) - \mathbb{P}(\{\xi \le x_1\}) \\
\Leftrightarrow\ & \mathbb{P}(\{x_1 < \xi \le x_2\}) = P(x_2) - P(x_1) \\
\Leftrightarrow\ & \mathbb{P}(\xi \in]x_1, x_2]) = P(x_2) - P(x_1).
\end{aligned} \tag{29}$$

$\square$

© 2025 Dirk Ostwald CC BY 4.0

Kumulative Verteilungsfunktionen

Theorem (Eigenschaften von kumulative Verteilungsfunktionen)

Es sei ξ eine Zufallsvariable und P ihre kumulative Verteilungsfunktion. Dann hat P die folgenden Eigenschaften

(1) P ist *monoton steigend*, i.e., wenn $x_1 < x_2$, dann gilt $P(x_1) \leq P(x_2)$.

(2) $\lim_{x \to -\infty} P(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} P(x) = 1$.

(3) P ist *rechtsseitig stetig*, d.h., $P(x) = \lim_{y \to x, y > x} P(y)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Bemerkungen

- Die genannten Eigenschaften können auch zur Definition einer KVF genutzt werden.
- (3) $\Leftrightarrow$ Eine KVF hat keine Sprünge, wenn man sich Grenzpunkten von rechts nähert.

Beweis

(1) Wir halten zunächst fest, dass für Ereignisse $A \subset B$ gilt, dass $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$. Wie halten dann fest, dass für $x_1 < x_2$,

$$\{\xi \leq x_1\} = \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \leq x_1\} \subset \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \leq x_2\} = \{\xi \leq x_2\} \tag{30}$$

Also gilt

$$\mathbb{P}(\{\xi \leq x_1\}) \leq \mathbb{P}\{\xi \leq x_2\} \Rightarrow P(x_1) \leq P(x_2). \tag{31}$$

(2) Wir verzichten auf einen Beweis

(3) Es seien $y_1 > y_2 > \cdots$ so, dass $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Dann gilt

$$\{\xi \leq x\} = \cap_{n=1}^{\infty}\{\xi \leq y_n\}. \tag{32}$$

Es gilt also

$$P(x) = \mathbb{P}(\{\xi \leq x\}) = \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty}\{\xi \leq y_n\}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\xi \leq y_n\}) \tag{33}$$

wobei wir die dritte Gleichung unbegründet stehen lassen.

Kumulative Verteilungsfunktionen von diskreten Zufallsvariablen

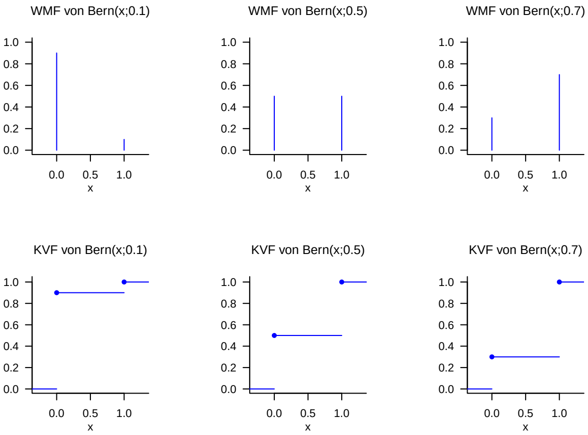
- Wenn $a < b$ und $\mathbb{P}(a < \xi < b) = 0$, dann ist P konstant horizontal auf $]a, b[$.
- An jedem Punkt x mit $\mathbb{P}(\xi = x) > 0$ springt die KVF um den Betrag $\mathbb{P}(\xi = x)$.
- $\Leftrightarrow$ An jedem Punkt x mit $p(x) > 0$ springt die KVF um den Betrag $p(x) > 0$.
- Generell ist die KVF einer diskreten Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathbb{N}_0$ durch

$$P : \mathbb{R} \to [0,1], x \mapsto P(x) := \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}(\xi = k) \tag{34}$$

gegeben, wobei $\lfloor x \rfloor$ die Abrundungsfunktion bezeichnet.

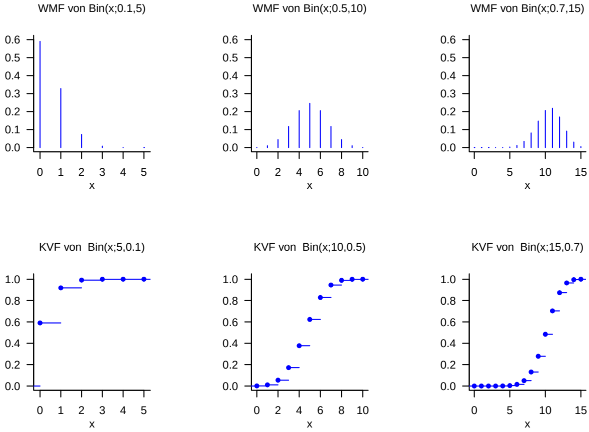
Kumulative Verteilungsfunktionen

Bernoulli-Zufallsvariablen



Kumulative Verteilungsfunktionen

Binomial-Zufallsvariablen



Kumulative Verteilungsfunktionen

Theorem (Kumulative Verteilungsfunktionen von kontinuierlichen ZVen)

ξ sei eine kontinuierliche Zufallsvariable mit WDF p und KVF P. Dann gilt

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(s)\,ds \text{ und } p(x) = P'(x). \tag{35}$$

Beweis

Wir halten zunächst fest, dass weil $\mathbb{P}(\xi = x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, die KVF von ξ keine Sprünge hat, d.h. P ist stetig. Mit der Definitionen von WDF und KVF, folgt, dass P die Form einer Stammfunktion von p hat. Dass p die Ableitung von P ist, folgt dann unmittelbar aus dem Fundamentalsatz der Analysis.

□

Bemerkungen

- Die KVF ist eine Stammfunktion der WDF, die WDF ist die Ableitung der KVF.
- Das *Theorem von Radon-Nikodym* ist eine generalisierte Variante dieser Einsicht.
- KVFen von kontinuierlichen ZV heißen auch kumulative Dichtefunktionen (KDFen).

Beispiel (Normalverteilung)

Es sei $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$.

- Die WDF von ξ ist

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto p(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right).$$

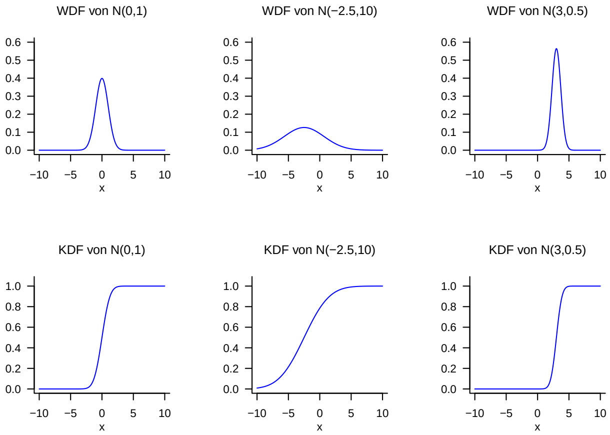
- Die KVF von ξ ist

$$P : \mathbb{R} \to]0,1[, x \mapsto P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(s-\mu)^2\right) ds.$$

- Die KVF von $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ kann nur numerisch, nicht analytisch, berechnet werden.
- Für $\mu = 1, \sigma^2 = 1$, gilt zum Beispiel $p(2) = 0.24$ und $P(2) = 0.84$.
- Die WDF und KVF von $Z \sim N(0,1)$ werden oft mit ϕ und Φ, respektive, bezeichnet.

Kumulative Verteilungsfunktionen

Normalverteilte Zufallsvariablen



Definition (Inverse Kumulative Verteilungsfunktion)

ξ sei eine kontinuierliche Zufallsvariable mit KVF P. Dann heißt die Funktion

$$P^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}, q \mapsto P^{-1}(q) := \{x \in \mathbb{R} | P(x) = q\} \tag{36}$$

die *inverse kumulative Verteilungsfunktion von* ξ.

Bemerkungen

- P^{-1} ist die Inverse von P, d.h. $P^{-1}(P(x)) = x$.
- Offenbar gilt $P(x) = q \Leftrightarrow \mathbb{P}(\xi \leq x) = q$.
- Für $q \in]0,1[$ ist also $P^{-1}(q)$ der Wert x von ξ, so dass $\mathbb{P}(\xi \leq x) = q$ gilt.
- Wenn $Z \sim N(0,1)$ mit KVF Φ ist, dann gilt zum Beispiel $\Phi^{-1}(0.975) = 1.960$.

Beispiel (Normalverteilung)

Es sei $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$.

- Die KVF von ξ ist

$$P : \mathbb{R} \to]0,1[, x \mapsto \mathbb{P}(\xi \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(s-\mu)^2\right) ds \tag{37}$$

- Die inverse KVF von ξ ist

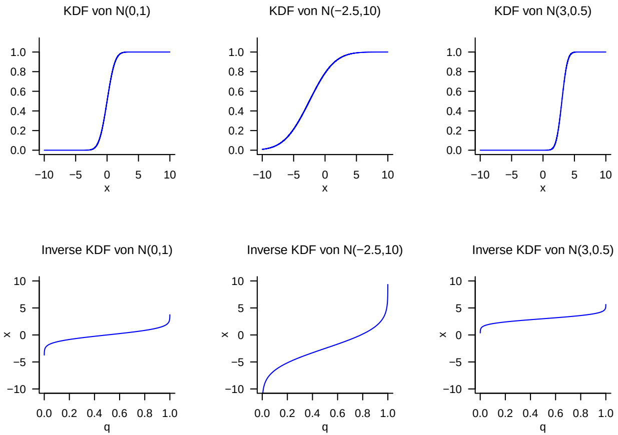
$$P^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}, q \mapsto P^{-1}(q) = \{x \in \mathbb{R} | P(x) = q\}. \tag{38}$$

- Für $\mu = 1, \sigma^2 = 1$ gilt z.B., dass $P(2) = 0.84$ und $P^{-1}(0.84) = 2$.
- Die inverse KVF von $\xi \sim N(0,1)$ wird oft mit Φ^{-1} bezeichnet.
- Typische Beispielwerte für die KVF und inverse KVF von $N(0,1)$ sind
  - $\Phi(1.645) = 0.950$, $\Phi^{-1}(0.950) = \Phi^{-1}(1 - 0.050) = 1.645$.
  - $\Phi(1.960) = 0.975$, $\Phi^{-1}(0.975) = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.050}{2}\right)$.

© 2025 Dirk Ostwald CC BY 4.0

Kumulative Verteilungsfunktionen

Normalverteilte Zufallsvariablen



Konstruktion, Definition, Notation, Intuition

Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Kumulative Verteilungsfunktionen

Selbstkontrollfragen

Wahrscheinlichkeitsräume und Zufallsvariablen

Wir haben drei Möglichkeiten zur Festlegung von W-Raummodellen für Zufallsvorgänge kennengelernt

(1) Definition von $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit einer Wahrscheinlichkeitsfunktion π.
(2) Definition von $(\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathbb{P}_\xi)$ für eine Zufallsvariable ξ durch einer WMF/WDF p oder eine KVF P.
(3) Definition von $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, Definition einer Zufallsvariable $\xi : \Omega \to \mathcal{X}$ und Herleitung von $\mathbb{P}_\xi$ in $\left(\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathbb{P}_\xi\right)$.

Abschließend wollen wir die Äquivalenz dieser Herangehensweisen zur Modellierung von Zufallsvorgängen betrachten.

Zunächst halten wir fest

(1) herrscht in Einführungen zur W-Theorie und mathematisch-orientierter W-Theorie vor (vgl. Fristedt (1998))
(2) herrscht in statistischen und datenwissenschaftlichen Anwendungen (ML, KI) vor (vgl. Demidenko (2020))

Es gilt, dass (1) und (2) äquivalent sind und (3) essentiell für die Theorie datenwissenschaftlicher Anwendungen ist.

Die Äquivalenz von (1) und (2) ergibt sich dabei durch Definition einer Zufallsvariable als Identitätsabbildung.

Wir wollen die Äquivalenz von (1) und (2) an zwei Beispielen verdeutlichen.

Wahrscheinlichkeitsräume und Zufallsvariablen

“Wir modellieren den Zufallsvorgang *Werfen eines Würfels* mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$”

- Wie gesehen würden wir hier $\Omega := \mathbb{N}_6$ und $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\mathbb{N}_6)$ wählen und $\mathbb{P}$ durch eine W-Funktion π festlegen.
- In jedem Durchgang des Zufallsvorgangs wird ein Ergebnis zufällig anhand von $\mathbb{P}(\{\omega\})$ realisiert.
- Man mag die so realisierten Ergebnisse $\omega_1, \omega_2, ...$ als Realisationen einer *Zufallsgröße* betrachten.
- Die realisierten Ergebnisse könnten z.B. wiederholten Würfelwürfen entsprechen.

“Wir modellieren den Zufallsvorgang *Werfen eines Würfels* mit einer Zufallsvariable ξ”

- Man würde hier $\mathcal{X} := \mathbb{N}_6$ und $\mathcal{S} := \mathcal{P}(\mathbb{N}_6)$ wählen und $\mathbb{P}_\xi$ durch eine WMF p_ξ festlegen.
- Die Realisierung $\xi = x$ hat dann die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_\xi(\xi = x) = p_\xi(x)$.
- Implizit hat man hier die Zufallsvariable ξ als die Identitätsfunktion

$$\xi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, x \mapsto \xi(x) := x \tag{39}$$

  auf einem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = \mathcal{X}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{S}$ festgelegt.
- Insbesondere gilt die Äquivalenz der WMF p_ξ auf $\mathcal{X}$ und der W-Funktion π auf $\Omega = \mathcal{X}$, denn

$$p_\xi(x) = \mathbb{P}_\xi(\xi = x) = \mathbb{P}(\{x \in \mathcal{X} | \xi(x) = x\}) = \mathbb{P}(\{x\}) = \pi(x) \text{ für alle } x \in \mathcal{X}. \tag{40}$$

- Damit gilt dann letztlich

$$(\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathbb{P}_\xi) = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \tag{41}$$

- Betrachten des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ergibt also keinen Mehrwert.

$\Rightarrow$ Generell wird hier die erste Sprechweise bevorzugt

Wahrscheinlichkeitsräume und Zufallsvariablen

"Wir modellieren einen *BDI-II-Itemwert einer Patient:in* mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$"

- Wie gesehen würden wir hier $\Omega := \mathbb{N}_3^0$ und $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ wählen und $\mathbb{P}$ durch eine W-Funktion π festlegen.
- In jedem Durchgang des Zufallsvorgangs wird ein Ergebnis zufällig anhand von $\mathbb{P}(\{\omega\})$ realisiert.
- Man mag die so realisierten Ergebnisse $\omega_1, \omega_2, \ldots$ als Realisationen einer *Zufallsgröße* betrachten.
- Die realisierten Ergebnisse könnten z.B. wiederholten Messungen an einer Patient:in entsprechen.

"Wir modellieren einen *BDI-II-Itemwert einer Patient:in* als Realisation einer Zufallsvariable ξ"

- Man würde hier $\mathcal{X} := \mathbb{N}_3^0$ und $\mathcal{S} := \mathcal{P}(\mathcal{X})$ wählen und $\mathbb{P}_\xi$ durch eine WMF p_ξ festlegen.
- Die Realisierung $\xi = x$ hat dann die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_\xi(\xi = x) = p_\xi(x)$.
- Implizit hat man hier die Zufallsvariable ξ als die Identitätsfunktion

$$\xi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, x \mapsto \xi(x) := x \tag{42}$$

  auf einem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = \mathcal{X}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{S}$ festgelegt.
- Insbesondere gilt die Äquivalenz der WMF p_ξ auf $\mathcal{X}$ und der W-Funktion π auf $\Omega = \mathcal{X}$, denn

$$p_\xi(x) = \mathbb{P}_\xi(\xi = x) = \mathbb{P}(\{x \in \mathcal{X} | \xi(x) = x\}) = \mathbb{P}(\{x\}) = \pi(x) \text{ für alle } x \in \mathcal{X}. \tag{43}$$

- Damit gilt dann letztlich

$$(\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathbb{P}_\xi) = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \tag{44}$$

- Betrachten des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ergibt also keinen Mehrwert.

$\Rightarrow$ Generell wird hier die zweite Sprechweise bevorzugt

Konstruktion, Definition, Notation, Intuition

Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Kumulative Verteilungsfunktionen

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie die Definition des Begriffs der Zufallsvariable wieder.
2. Erläutern Sie die Gleichung $\mathbb{P}_\xi(\xi = x) = \mathbb{P}(\{\xi = x\})$.
3. Erläutern Sie die intuitive Bedeutung von $\mathbb{P}(\xi = x)$.
4. Geben Sie die Definition des Begriffs der Wahrscheinlichkeitsmassefunktion wieder.
5. Geben Sie die Definition des Begriffs der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion wieder.
6. Geben Sie die Definition der WDF einer normalverteilten Zufallsvariable wieder.
7. Geben Sie die Definition des Begriffs der kumulativen Verteilungsfunktion wieder.
8. Schreiben sie die Intervallwahrscheinlichkeit einer Zufallsvariable mithilfe ihrer KVF.
9. Schreiben Sie den Wert $P(x)$ der KVF einer kontinuierlichen Zufallsvariable mithilfe ihrer WDF p.
10. Schreiben Sie den Wert $p(x)$ der WDF einer kontinuierlichen Zufallsvariable mithilfe ihrer KVF P.
11. Geben Sie die Definition der KVF einer normalverteilten Zufallsvariable wieder.
12. Geben Sie die Definition des Begriffs der inversen Verteilungsfunktion wieder.

Selbstkontrollfragen - Lösungen

1. Siehe Definition (Zufallsvariable).
2. Die Gleichung besagt, dass der von der Verteilung $\mathbb{P}_\xi$ der Zufallsvariable ξ zugeordnete Wahrscheinlichkeitswert für das Ereignis $\xi = x$ in $\mathcal{X}$ definitionsgemäß gleich dem Wert des von dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ dem Urbild des Ereignisses $\xi = x$, also der Menge $\{\xi = x\} = \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) = x\}$ in $\mathcal{A}$, ist. Siehe Definition (Notation von Zufallsvariablen).
3. Intuitiv ist $\mathbb{P}(\xi = x)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariable ξ den Wert x annimmt.
4. Siehe Definition (Diskrete Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsmassefunktion).
5. Siehe Definition (Kontinuierliche Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion).
6. Siehe Definition (Normalverteilte und standardnormalverteilte Zufallsvariable).
7. Siehe Definition (Kumulative Verteilungsfunktion).
8. Siehe Theorem (Intervallwahrscheinlichkeiten).
9. Siehe Theorem (Kumulative Verteilungsfunktionen von kontinuierlichen Zufallsvariablen). Es gilt
$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(s)\, ds. \tag{45}$$
10. Siehe Theorem (Kumulative Verteilungsfunktionen von kontinuierlichen Zufallsvariablen). Es gilt
$$p(x) = \frac{d}{dx} P(x) = P'(x). \tag{46}$$
11. Siehe Kumulative Verteilungsfunktionen, Beispiel (Normalverteilung). Für eine normalverteilte Zufallsvariable ξ mit Erwartungswertparameter μ und Varianzparameter $\sigma^2 > 0$ hat die KVF die Form
$$P : \mathbb{R} \to]0,1[, x \mapsto P(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(s-\mu)^2\right) ds. \tag{47}$$
12. Siehe Definition (Inverse Kumulative Verteilungsfunktion).

Referenzen

Demidenko, Eugene. 2020. *Advanced Statistics with Applications in R*. Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ: Wiley.

Fristedt, Bert. 1998. *A Modern Approach to Probability Theory*. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-2837-5.

Hesse, Christian. 2009. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 2nd ed. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.