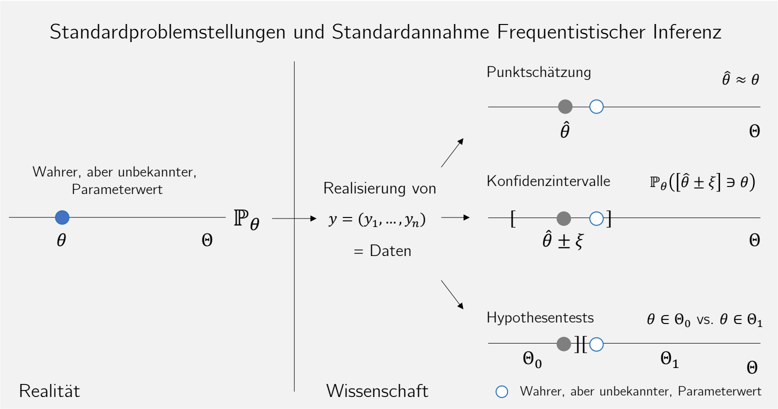
Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

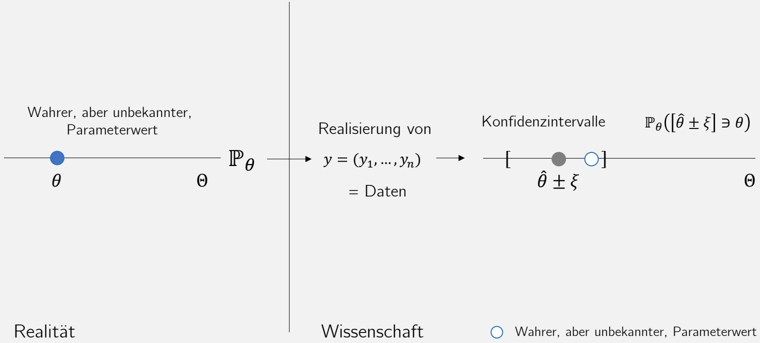
BSc Psychologie WiSe 2024/25

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(10) Konfidenzintervalle


Standardproblemstellungen und Standardannahme Frequentistischer Inferenz
Wahrer, aber unbekannter, Parameterwert
θ
Θ
$\mathbb{P}_\theta$
Realisierung von
$y = (y_1, \ldots, y_n)$
= Daten
Punktschätzung
$\hat{\theta} \approx \theta$
$\hat{\theta}$
Θ
Konfidenzintervalle
$\mathbb{P}_\theta([\hat{\theta} \pm \xi] \ni \theta)$
$\hat{\theta} \pm \xi$
Θ
Hypothesentests
$\theta \in \Theta_0$ vs. $\theta \in \Theta_1$
Θ_0
Θ_1
Θ
Realität
Wissenschaft
Wahrer, aber unbekannter, Parameterwert

Standardproblemstellungen und Standardannahme Frequentistischer Inferenz



Standardannahme der Frequentistischen Inferenz

$\mathcal{M}$ sei ein Frequentistisches Inferenzmodell mit Zufallsvektor y.

Es wird angenommen, dass ein vorliegender Datensatz eine der möglichen Realisierungen von y ist.

Aus Frequentistischer Sicht kann man eine Studie unendlich oft wiederholen und zu jedem Datensatz Schätzer oder Statistiken auswerten, z.B. das Stichprobenmittel:

$$
\begin{aligned}
&\text{Datensatz (1)}: y^{(1)} = \left(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, ..., y_n^{(1)}\right) \text{ mit } \bar{y}^{(1)} = \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^n y_i^{(1)} \\
&\text{Datensatz (2)}: y^{(2)} = \left(y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, ..., y_n^{(2)}\right) \text{ mit } \bar{y}^{(2)} = \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^n y_i^{(2)} \\
&\text{Datensatz (3)}: y^{(3)} = \left(y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, ..., y_n^{(3)}\right) \text{ mit } \bar{y}^{(3)} = \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^n y_i^{(3)} \\
&\text{Datensatz (4)}: y^{(4)} = \left(y_1^{(4)}, y_2^{(4)}, ..., y_n^{(4)}\right) \text{ mit } \bar{y}^{(4)} = \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^n y_i^{(4)} \\
&\text{Datensatz (5)}: y^{(5)} = ...
\end{aligned}
$$

Um die Qualität ihrer Methoden zu beurteilen betrachtet die Frequentistische Inferenz deshalb die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Schätzern und Statistiken. Was zum Beispiel ist die Verteilung der $\bar{y}^{(1)}$, $\bar{y}^{(2)}$, $\bar{y}^{(3)}$, $\bar{y}^{(4)}$, ... also die Verteilung der Zufallsvariable $\bar{y}_n$?

Wenn eine Methode im Sinne der Frequentistischen Standardannahme "gut" ist, dann heißt das also, dass sie bei häufiger Anwendung "im Mittel gut" ist. Im Einzelfall, also im Normalfall nur eines vorliegenden Datensatzes, kann sie auch "schlecht" sein.

Definition

Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter des Normalverteilungmodells

Konfidenzintervall für den Varianzparameter des Normalverteilungmodells

Anwendungsbeispiel

Selbstkontrollfragen

Definition

Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter des Normalverteilungmodells

Konfidenzintervall für den Varianzparameter des Normalverteilungmodells

Anwendungsbeispiel

Selbstkontrollfragen

Definition

Definition (δ-Konfidenzintervall)

Es sei y der Zufallsvektor eines Frequentistischen Inferenzmodells mit wahrem, aber unbekannten Parameter, $\theta \in \Theta$, es sei $\delta \in]0, 1[$ und es seien $G_u(y)$ und $G_o(y)$ zwei Statistiken. Dann heißt ein Intervall der Form

$$\kappa(y) := [G_u(y), G_o(y)], \tag{1}$$

so dass

$$\mathbb{P}_\theta\left(\kappa(y) \ni \theta\right) = \mathbb{P}_\theta\left(G_u(y) \le \theta \le G_o(y)\right) = \delta \text{ für alle } \theta \in \Theta \text{ gilt} \tag{2}$$

ein δ-*Konfidenzintervall für* θ. δ ist die Überdeckungswahrscheinlichkeit von $\kappa(y)$ für θ und wird *Konfidenzlevel* genannt. Die Statistiken $G_u(y)$ und $G_o(y)$ heißen die *unteren* und *oberen Grenzen* des Konfidenzintervalls, respektive.

Bemerkungen

- θ ist fest, nicht zufällig, und unbekannt.
- κ ist ein zufälliges Intervall, weil $G_u(y)$ und $G_o(y)$ Zufallsvariablen sind.
- $\kappa \ni \theta$ bedeutet $\theta \in \kappa$, aber κ ist zufällig und steht deshalb vorn (cf. $\mathbb{P}(\xi = x)$).
- Ein δ-Konfidenzintervall überdeckt den wahren Wert θ mit Wahrscheinlichkeit δ.
- Oft wird $\delta = 0.95$ gewählt, also 95%-*Konfidenzintervalle* betrachtet.

Definition

Zwei Interpretationen von δ-Konfidenzintervallen

(1) Wird ein Zufallsvorgang unter gleichen Umständen häufig wiederholt, so überdeckt das zugehörige δ-Konfidenzintervall den wahren, aber unbekannten Parameterwert im langfristigen Mittel in $\delta \cdot 100\%$ der Fälle. Technischer ausgedrückt, für unabhängig und identisch realisierte Stichproben einer Verteilung mit wahrem, aber unbekannten, Parameter θ überdeckt im langfristigen Mittel ein entsprechendes δ-Konfidenzintervall θ in $\delta \cdot 100\%$ aller Fälle.

(2) Gegeben sei eine Menge von Zufallsvorgängen mit wahren, aber unbekannten, Parametern $\theta_1, \theta_2, ...$ und realisierte δ-Konfidenzintervalle für eben jene Menge von wahren, aber unbekannten Parametern $\theta_1, \theta_2, ...$ Dann überdecken im langfristigen Mittel $\delta \cdot 100\%$ der Konfidenzintervalle den wahren, aber unbekannten, Wert θ_i für $i = 1, 2, ...$ Technischer ausgedrückt, für unabhängig realisierte Stichproben von Verteilungen mit wahren, aber unbekannten, Parametern $\theta_1, \theta_2, ...$ überdecken im langfristigen Mittel entsprechende δ-Konfidenzintervalle θ_i für $i = 1, 2, ...$ in $\delta \cdot 100\%$ aller Fälle.

Wir demonstrieren im Folgenden beide Interpretationen mithilfe von Simulationen.

Allgemeine Konstruktion von Konfidenzintervallen

(1) Definition des Frequentistischen Inferenzmodells

(2) Definition der Konfidenzintervallstatistik

(3) Analyse der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik

(4) Etablierung der Konfidenzbedingung

Beispiele

(1) Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter des Normalverteilungsmodells

(2) Konfidenzintervall für den Varianzparameter des Normalverteilungsmodells

Definition

Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter des Normalverteilungmodells

Konfidenzintervall für den Varianzparameter des Normalverteilungmodells

Anwendungsbeispiel

Selbstkontrollfragen

(1) Definition des Frequentistischen Inferenzmodells

$y := (y_1, ..., y_n)$ sei der Zufallsvektor eines Normalverteilungsmodells mit unbekannten Parametern μ und $\sigma^2 > 0$. Wir entwickeln ein δ-Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter μ.

(2) Definition der Statistik

Wir betrachten die T-Konfidenzintervallstatistik

$$T := \frac{\sqrt{n}}{S}(\bar{y} - \mu) \text{ mit } \bar{y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \text{ und } S := \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}. \tag{3}$$

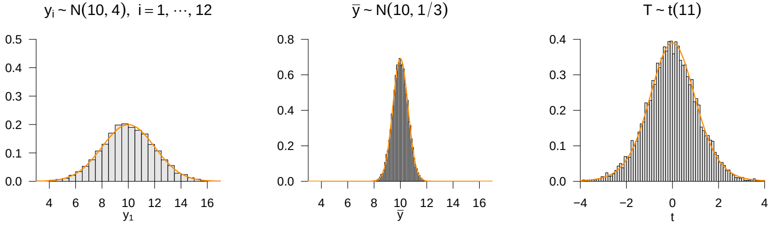
(3) Analyse der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik

Für die T-Konfidenzintervallstatistik gilt $T \sim t(n-1)$, die T-Konfidenzintervallstatistik ist also eine t-verteilte Zufallsvariable mit Freiheitsgradparameter $n-1$ (wir verzichten an dieser Stelle auf einen Beweis dieser Tatsache). Die T-Konfidenzintervallstatistik ist eine Funktion der Stichprobe $y_1, ..., y_n$ (via $\bar{y}$ und S), während ihre Verteilung weder von μ noch von σ^2 abhängt. Wir bezeichnen die die WDF einer t-verteilten Zufallvariable mit t, die KVF einer t-verteilten Zufallvariable mit Ψ und die inverse KVF einer t-verteilten Zufallvariable mit Ψ^{-1}.

(3) Analyse der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik (fortgeführt)

```
# Modellformulierung
mu      = 10                                        # w.a.u. Erwartungswertparameter
sigsqr  = 4                                         # wahrer bekannter Varianzparameter
n       = 12                                        # Stichprobenumfang
ns      = 1e4                                       # Anzahl Stichprobenrealisierungen
res     = 1e3                                       # Ausgangsraumaufloesung

# analytische Definitionen und Resultate
y_1     = seq(3,17,len = res)                       # y_1 Raum
t       = seq(-4,4,len = res)                       # t Raum
p_y_1   = dnorm(y_1,mu,sqrt(sigsqr))                # y_1 WDF
p_y_bar = dnorm(y_1,mu,sqrt(sigsqr/n))              # y_bar WDF
p_t     = dt(t,n-1)                                 # t WDF

# Simulation
y_i     = rep(NaN,ns)                               # y_1 Array
y_bar   = rep(NaN,ns)                               # \bar{y} Array
Tee     = rep(NaN,ns)                               # T Array
for(s in 1:ns){                                     # Simulationsiterationen
  y         = rnorm(n,mu,sqrt(sigsqr))              # Stichprobenrealisierung
  y_i[s]    = y[1]                                  # y_i
  y_bar[s]  = mean(y)                               # Stichprobenmittelrealisierung
  Tee[s]    = sqrt(n)*((y_bar[s] - mu)/sqrt(var(y))) # T-Statistik Realisierung
}
```

(3) Analyse der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik (fortgeführt)

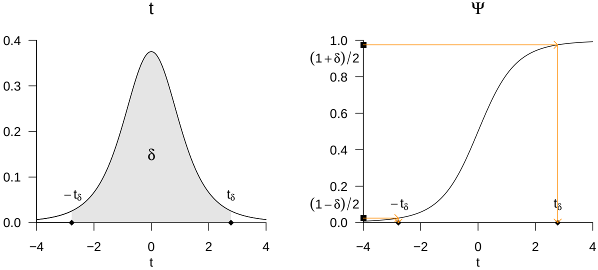


(4) Etablierung der Konfidenzbedingung

Für $\delta \in]0,1[$ seien

$$t_1 := \Psi^{-1}\left(\frac{1-\delta}{2}; n-1\right) \text{ und } t_2 := \Psi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right) \tag{4}$$

Es gilt dann $(1+\delta)/2 - (1-\delta)/2 = \delta$ und zum Beispiel gilt für $n = 5$ und $\delta = 0.95$, $t_1 = \Psi^{-1}(0.025; 4) = -2.78$ und $t_2 = \Psi^{-1}(0.975; 4) = 2.78$. Weiterhin gilt mit der Symmetrie von $t(n-1)$, $t_1 = -t_2$. Wir definieren deshalb $t_\delta := t_1$. Es gilt dann also per Definition $\mathbb{P}\left(-t_\delta \leq T \leq t_\delta\right) = \delta$.



(4) Etablierung der Konfidenzbedingung (fortgeführt)

Mit der Definition von t_δ wie oben folgt dann aber

$$
\begin{aligned}
\delta &= \mathbb{P}\left(-t_\delta \le T \le t_\delta\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-t_\delta \le \frac{\sqrt{n}}{S}(\bar{y}-\mu) \le t_\delta\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\delta \le \bar{y}-\mu \le \frac{S}{\sqrt{n}}t_\delta\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\bar{y}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\delta \le -\mu \le -\bar{y}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\delta\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bar{y}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\delta \ge \mu \ge \bar{y}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\delta\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bar{y}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\delta \le \mu \le \bar{y}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\delta\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\bar{y}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\delta, \bar{y}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\delta\right] \ni \mu\right).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Theorem (Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter)

Gegeben sei das Normalverteilungsmodell

$$y_1, ..., y_n \sim N(\mu, \sigma^2) \tag{6}$$

mit wahren, aber unbekannten, Parametern μ und σ^2, es sei $\delta \in]0,1[$ und es sei

$$t_\delta := \Psi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right). \tag{7}$$

mit der inversen KVF Ψ^{-1} einer t-verteilten Zufallsvariable. Dann gilt für das Intervall

$$\kappa(y) := \left[\bar{y} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\delta, \bar{y} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_\delta\right], \tag{8}$$

mit dem Stichprobenmittel und der Stichprobenstandardabweichung

$$\bar{y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i \text{ und } S := \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \tag{9}$$

respektive, dass

$$\mathbb{P}_\mu(\kappa(y) \ni \mu) = \delta. \tag{10}$$

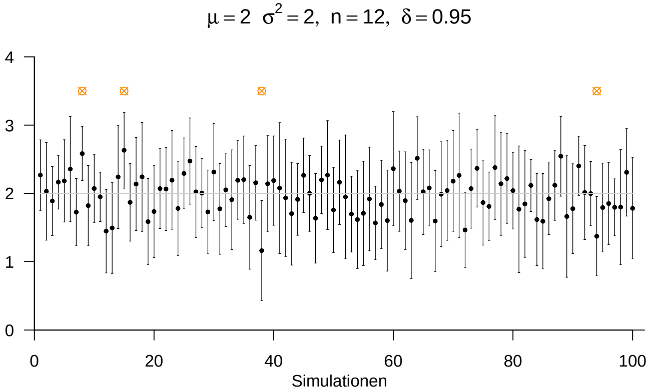
Bemerkung

- Der Beweis dieses Theorems ist durch obige Konstruktion gegeben.
- κ ist ein zufälliges Intervall, weil $\bar{y}$ und S Zufallsvariablen sind.

Simulation der ersten Interpretation eines Konfidenzintervalls

```
# Modellformulierung
set.seed(1)                                         # random number generator seed
mu      = 2                                         # w.a.u. Erwartungswertparameter
sigsqr  = 1                                         # w.a.u. Varianzparameter
sigma   = sqrt(sigsqr)                              # w.a.u. St.Abweichungsparameter
n       = 12                                        # Stichprobenumfang
delta   = 0.95                                      # Konfidenzbedingung
t_delta = qt((1+delta)/2,n-1)                       # \Psi^-1((\delta + 1)/2, n-1)

# Simulation
ns      = 1e2                                       # Anzahl Simulationen
y_bar   = rep(NaN,ns)                               # Stichprobenmittelarray
S       = rep(NaN,ns)                               # St.Abweichungsarray
kappa   = matrix(rep(NaN,2*ns), ncol = 2)           # Konfidenzintervallarray
for(i in 1:ns){
   y          = rnorm(n,mu,sigma)                   # Stichprobenrealisierung
   y_bar[i]   = mean(y)                             # Stichprobenmittel
   S[i]       = sd(y)                               # Stichprobenstandardabweichung
   kappa[i,1] = y_bar[i] - (S[i]/sqrt(n))*t_delta  # untere Konfidenzintervallgrenze
   kappa[i,2] = y_bar[i] + (S[i]/sqrt(n))*t_delta  # obere Konfidenzintervallgrenze
}
```

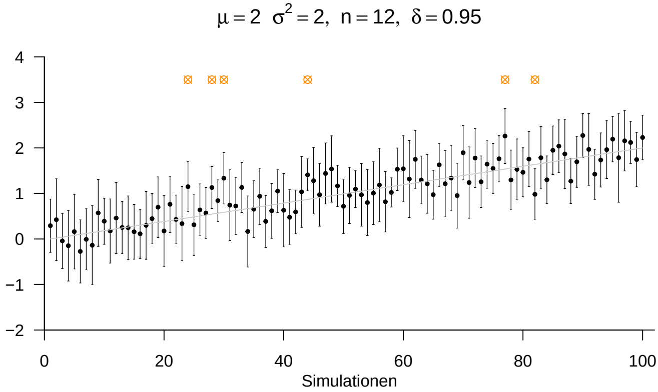
Simulation der ersten Interpretation eines Konfidenzintervalls



Simulation der zweiten Interpretation eines Konfidenzintervalls

```r
# Anzahl Simulationen mit \theta_1, \theta_2,...
set.seed(2)                                           # random number generator seed
ns      = 1e2                                         # Anzahl Simulationen

# Modellformulierung
mu      = 2 * seq(0,1,len = ns)                       # w.a.u. Erwartungswertparameter
sigsqr  = 1                                           # w.a.u. Varianzparameter
sigma   = sqrt(sigsqr)                                # w.a.u. St.Abweichungsparameter
n       = 12                                          # Stichprobenumfang
delta   = 0.95                                        # Konfidenzbedingung
t_delta = qt((1+delta)/2,n-1)                         # \Psi^-1((\delta + 1)/2, n-1)

# Simulation
y_bar   = rep(NaN,ns)                                 # Stichprobenmittelarray
S       = rep(NaN,ns)                                 # St.Abweichungsarray
kappa   = matrix(rep(NaN,2*ns), ncol = 2)             # Konfidenzintervallarray
for(i in 1:ns){
   y           = rnorm(n,mu[i],sigma)                 # Stichprobenrealisierung
   y_bar[i]    = mean(y)                              # Stichprobenmittel
   S[i]        = sd(y)                                # Stichprobenstandardabweichung
   kappa[i,1] = y_bar[i] - (S[i]/sqrt(n))*t_delta   # untere Konfidenzintervallgrenze
   kappa[i,2] = y_bar[i] + (S[i]/sqrt(n))*t_delta   # obere Konfidenzintervallgrenze
}
```

Simulation der zweiten Interpretation eines Konfidenzintervalls



Definition

Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter des Normalverteilungmodells

Konfidenzintervall für den Varianzparameter des Normalverteilungmodells

Anwendungsbeispiel

Selbstkontrollfragen

(1) Definition des Frequentistischen Inferenzmodells

Es sei $y_1, ..., y_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ eine Stichprobe mit unbekanntem Varianzparameter $\sigma^2 > 0$ und bekanntem oder unbekanntem Erwartungswertparameter μ. Wir entwickeln ein δ-Konfidenzintervall für den Varianzparameter σ^2.

(2) Definition der Statistik

Wir betrachten die U-Konfidenzintervallstatistik

$$U := \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \text{ mit } S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 . \tag{11}$$

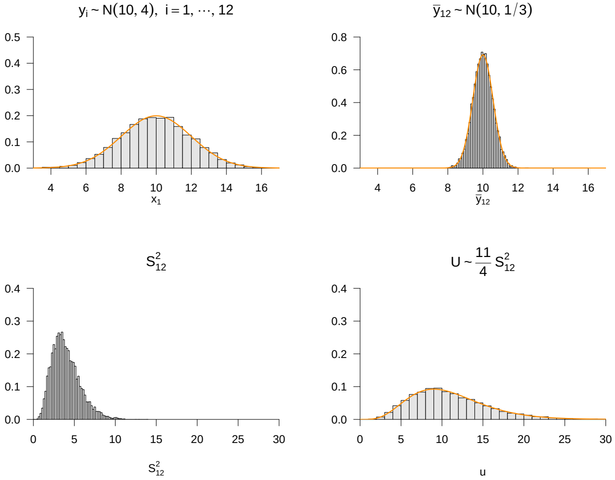
(3) Analyse der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik

Für die U-Konfidenzintervallstatistik gilt $U \sim \chi^2(n-1)$ (wir verzichten an dieser Stelle auf einen Beweis dieser Tatsache). Die U-Konfidenzintervallstatistik ist eine Funktion von $y_1, ..., y_n$ (via S^2) und σ^2, während ihre Verteilung nicht von σ^2 abhängt. Wir bezeichnen die WDF einer χ^2-verteilten Zufallvariable mit χ^2, die KVF einer χ^2-verteilten Zufallvariable mit Ξ und die inverse KVF einer χ^2-verteilten Zufallvariable mit Ξ^{-1}.

(3) Analyse der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik (fortgeführt)

```
# Modellformulierung
mu      = 10                                       # wahrer Erwartungswertparameter
sigsqr  = 4                                        # wahrer bekannter Varianzparameter
n       = 12                                       # Stichprobengroesse
ns      = 1e4                                      # Anzahl Stichprobenrealisierungen
res     = 1e3                                      # Ausgangsraumaufloesung

# analytische Definitionen und Resultate
y_1     = seq(3,17,len = res)                      # y_1 Raum
y_bar   = seq(3,17,len = res)                      # y_bar Raum
u_1     = seq(0,30,len = res)                      # normalisierte S^2 Raum
p_y_1   = dnorm(y_1,mu,sqrt(sigsqr))               # y_1 WDF
p_y_bar = dnorm(y_bar,mu,sqrt(sigsqr/n))           # y_bar WDF
p_u     = dchisq(u_1,n-1)                          # u_1 WDF

# Simulation
y_i     = rep(NaN,ns)                              # y_1 Array
y_bar   = rep(NaN,ns)                              # \bar{y} Array
S_sqr   = rep(NaN,ns)                              # S^2 Array
U       = rep(NaN,ns)                              # U Array

for(s in 1:ns){                                    # Simulationsiterationen
  y         = rnorm(n,mu,sqrt(sigsqr))             # Stichprobenrealisierung
  y_i[s]    = y[1]                                 # y_i
  y_bar[s]  = mean(y)                              # Stichprobenmittelrealisierung
  S_sqr[s]  = var(y)                               # Stichprobenvarianzrealisierung

  # U-Statistik Realisiation
  U[s]      = ((n-1)/sigsqr)*S_sqr[s]
}
```

(3) Analyse der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik (fortgeführt)

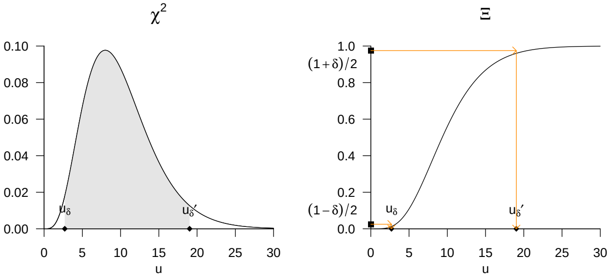


(4) Etablierung der Konfidenzbedingung

Für $\delta \in]0,1[$ seien

$$u_\delta := \Xi^{-1}\left(\frac{1-\delta}{2}; n-1\right) \text{ und } u'_\delta := \Xi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right) \tag{12}$$

Es gilt dann $(1+\delta)/2 - (1-\delta)/2 = \delta$ gilt und zum Beispiel gilt für $n = 10$ und $\delta = 0.95$, $u_\delta := \Xi^{-1}(0.025; 9) = 2.70$ und $u'_\delta := \Xi^{-1}(0.975; 9) = 19.0$. Es gilt hier also per Definition $\mathbb{P}(u_\delta \leq U \leq u'_\delta) = \delta$.



(4) Etablierung der Konfidenzbedingung (fortgeführt)

Mit der Definition von u_δ und u'_δ wie oben folgt dann aber

$$
\begin{aligned}
\delta &= \mathbb{P}\left(u_\delta \le U \le u'_\delta\right) \\
&= \mathbb{P}\left(u_\delta \le \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \le u'_\delta\right) \\
&= \mathbb{P}\left(u_\delta^{-1} \ge \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \ge {u'_\delta}^{-1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{u_\delta} \ge \sigma^2 \ge \frac{(n-1)S^2}{u'_\delta}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{u'_\delta} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2)}{u_\delta}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\frac{(n-1)S^2}{u'_\delta}, \frac{(n-1)S^2)}{u_\delta}\right] \ni \sigma^2\right).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Wir können nun das gesuchte Konfidenzintervall definieren.

Theorem (Konfidenzintervall für den Varianzparameter)

Gegeben sei das Normalverteilungsmodell

$$y_1, ..., y_n \sim N(\mu, \sigma^2) \tag{14}$$

mit wahren, aber unbekannten, Parametern μ und σ^2, es sei $\delta \in]0,1[$ und es seien

$$u_\delta := \Xi^{-1}\left(\frac{1-\delta}{2}; n-1\right) \text{ und } u'_\delta := \Xi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right) \tag{15}$$

mit der inversen KVF Ξ^{-1} einer χ^2-verteilten Zufallsvariable. Dann gilt für das Intervall

$$\kappa(y) := \left[\frac{(n-1)S^2}{u'_\delta}, \frac{(n-1)S^2}{u_\delta}\right]. \tag{16}$$

mit der Stichprobenvarianz

$$S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2, \tag{17}$$

dass

$$\mathbb{P}_{\sigma^2}(\kappa(y) \ni \sigma^2) = \delta. \tag{18}$$

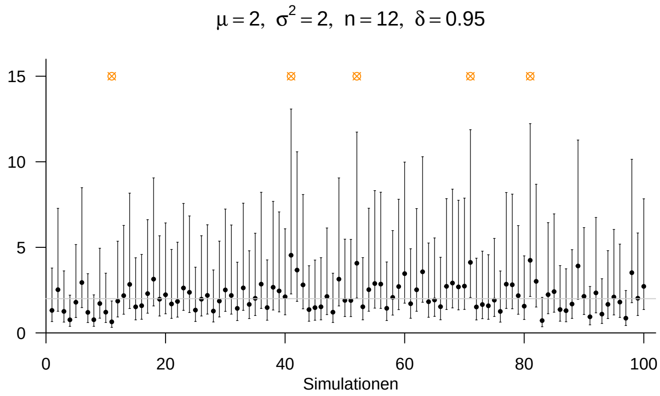
Bemerkung

- Der Beweis dieses Theorems ist durch obige Konstruktion gegeben.
- κ ist ein zufälliges Intervall, weil S^2 eine Zufallsvariable ist.

Simulation der ersten Interpretation des Konfidenzintervalls

```
# Modellformulierung
set.seed(1)                                # random number generator seed
mu          = 2                             # w.a.u. Erwartungswertparameter
sigsqr      = 2                             # w.a.u. Varianzparameter
n           = 12                            # Stichprobengroesse
delta       = 0.95                          # Konfidenzbedingung
u_delta     = qchisq((1-delta)/2, n - 1)    # \Xi^2((1-\delta)/2; n - 1)
u_delta_p   = qchisq((1+delta)/2, n - 1)    # \Xi^2((1+\delta)/2; n - 1)

# Simulation
ns      = 1e2                               # Anzahl Simulationen
y_bar   = rep(NaN,ns)                       # Stichprobenmittelarray
S2      = rep(NaN,ns)                       # Stichprobenvarianzarray
kappa   = matrix(rep(NaN,2*ns), ncol = 2)   # Konfidenzintervallarray
for(i in 1:ns){                             # Simulationsiterationen
   y           = rnorm(n,mu,sqrt(sigsqr))   # Stichprobenrealisierung
   S2[i]       = var(y)                     # Stichprobenvarianz
   kappa[i,1]  = (n-1)*S2[i]/u_delta_p      # untere KI Grenze
   kappa[i,2]  = (n-1)*S2[i]/u_delta        # obere KI Grenze
}
```

Simulation der ersten Interpretation des Konfidenzintervalls



Anwendungsbeispiel

Beispiel | Evidenzbasierte Evaluation von Psychotherapie bei Depression

Pre-BDI

n = 12

BDI-II Fragebogen

Name | Alter | Geschlecht m / w | Datum

Anleitung: Dieser Fragebogen enthält 21 Gruppen von Aussagen. Bitte lesen Sie jede dieser Gruppen von Aussagen sorgfältig durch und suchen Sie sich dann in jeder Gruppe **eine Aussage** heraus, die am besten beschreibt, wie Sie sich **in den letzten zwei Wochen, einschließlich heute, gefühlt haben**. Kreuzen Sie die Zahl neben der Aussage an, die Sie sich herausgesucht haben (0, 1, 2 oder 3). Falls in einer Gruppe mehrere Aussagen gleichermaßen auf Sie zutreffen, kreuzen Sie die Aussage mit der höheren Zahl an. Achten Sie bitte darauf, dass Sie in jeder Gruppe nicht mehr als eine Aussage ankreuzen, das gilt auch für Gruppe 16 (Veränderungen der Schlafgewohnheiten) oder Gruppe 18 (Veränderungen des Appetits).

1.) Traurigkeit
- **0** Ich bin nicht traurig.
- **1** Ich bin oft traurig.
- **2** Ich bin ständig traurig.
- **3** Ich bin so traurig oder unglücklich, dass ich es nicht aushalte.

2.) Pessimismus
- **0** Ich sehe nicht mutlos in die Zukunft.
- **1** Ich sehe mutloser in die Zukunft als sonst.
- **2** Ich bin mutlos und erwarte nicht, dass meine Situation besser wird.
- **3** Ich glaube, dass meine Zukunft hoffnungslos ist und nur noch schlechter wird.

3.) Versagensgefühle
- **0** Ich fühle mich nicht als Versager.
- **1** Ich habe häufiger Versagensgefühle.
- **2** Wenn ich zurückblicke, sehe ich eine Menge Fehlschläge.
- **3** Ich habe das Gefühl, als Mensch ein völliger Versager zu sein.

4.) Verlust von Freude
- **0** Ich kann die Dinge genauso gut genießen wie früher.
- **1** Ich kann die Dinge nicht mehr so genießen wie früher.
- **2** Dinge, die mir früher Freude gemacht haben, kann ich kaum mehr genießen.
- **3** Dinge, die mir früher Freude gemacht haben, kann ich überhaupt nicht mehr genießen.

5.) Schuldgefühle
- **0** Ich habe keine besonderen Schuldgefühle.
- **1** Ich habe oft Schuldgefühle wegen Dingen, die ich getan habe oder hätte tun sollen.
- **2** Ich habe die meiste Zeit Schuldgefühle.
- **3** Ich habe ständig Schuldgefühle.

6.) Bestrafungsgefühle
- **0** Ich habe nicht das Gefühl, für etwas bestraft zu sein.
- **1** Ich habe das Gefühl, vielleicht bestraft zu werden.
- **2** Ich erwarte, bestraft zu werden.
- **3** Ich habe das Gefühl, bestraft zu sein.

7.) Selbstablehnung
- **0** Ich halte von mir genauso viel wie immer.
- **1** Ich habe Vertrauen in mich verloren.
- **2** Ich bin von mir enttäuscht.
- **3** Ich lehne mich völlig ab.

8.) Selbstvorwürfe
- **0** Ich kritisiere oder tadle mich nicht mehr als sonst.
- **1** Ich bin mir gegenüber kritischer als sonst.
- **2** Ich kritisiere mich für all meine Mängel.
- **3** Ich gebe mir die Schuld für alles Schlimme, was passiert.

9.) Selbstmordgedanken
- **0** Ich denke nicht daran, mir etwas anzutun.
- **1** Ich denke manchmal an Selbstmord, aber ich würde es nicht tun.
- **2** Ich möchte mich am liebsten umbringen.
- **3** Ich würde mich umbringen, wenn ich die Gelegenheit dazu hätte.

10.) Weinen
- **0** Ich weine nicht öfter als früher.
- **1** Ich weine jetzt mehr als früher.
- **2** Ich weine beim geringsten Anlass.
- **3** Ich möchte gern weinen, aber ich kann nicht.

PEARSON PsychCorp

Summe Seite 1:

Post-BDI

⇒ Pre-Post BDI Score Reduktion

Beispiel | Evidenzbasierte Evaluation von Psychotherapie bei Depression

i	BDI.Reduktion
1	-1
2	3
3	-2
4	9
5	3
6	-2
7	4
8	5
9	5
10	1
11	9
12	4

Beispiel | Evidenzbasierte Evaluation von Psychotherapie bei Depression

Für die Pre-Post BDI Score Reduktion y_i der $i$ten von n Patient:innen legen wir das Modell

$$y_i = \mu + \varepsilon_i \text{ mit } \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \text{ u.i.v. für } i = 1, ..., n \tag{19}$$

zugrunde. Dabei wird die Pre-Post BDI Reduktion y_i der $i$ten Patient:in also mithilfe einer über die Gruppe von Patient:innen identischen Pre-Post BDI Score Reduktion $\mu \in \mathbb{R}$ und einer Patient:innen-spezifischen normalverteilten Pre-Post BDI Score Reduktionsabweichung ε_i erklärt.

Wie gezeigt ist dieses Modell äquivalent zum oben eingeführten Normalverteilungsmodell

$$y_1, ..., y_n \sim N(\mu, \sigma^2). \tag{20}$$

Die Standardproblemstellungen der Frequentistischen Inferenz führen in diesem Szenario auf folgende Fragen:

(1) Was sind sinnvolle Tipps für die wahren, aber unbekannten, Parameterwerte μ und σ^2?
(2) Wie gelingt im Sinne einer Intervallschätzung eine möglichst sichere Schätzung von μ und σ^2?
(3) Entscheiden wir uns sinnvollerweise für die Hypothese, dass gilt $\mu \neq 0$?

Anwendungsbeispiel

Beispiel | Evidenzbasierte Evaluation von Psychotherapie bei Depression

Wir haben in (10) Parameterschätzung gesehen, dass unverzerrte Schätzer für den Erwartungswertparameter μ und den Varianzparameter σ^2 durch das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz gegeben sind.

```
mu_hat     = mean(y)    # Stichprobenmittel als Erwartungswertparameterschätzer
sigsqr_hat = var(y)     # Stichprobenvarianz als Varianzparameterschätzer
```

Es sind also $\hat{\mu} = 3.17$ und $\hat{\sigma}^2 = 13.8$ sinnvolle Tipps für μ und σ^2 basierend auf den vorliegenden 12 Datenpunkten.

Um eine möglischst sichere Schätzung für μ zu erlangen, geht die Frequentistische Inferenz zur Intervallschätzung mithilfe von δ-Konfidenzintervallen über, für die die assoziierte Unsicherheit dann ein ein prädefiniertes Level von 1 - δ hat, im langfristigen Mittel überdeckt ein angegebenes δ-Konfidenzintervall den wahren, aber unbekannten Parameterwert in (nur) $1 - \delta \cdot$ 100 von 100 Fällen nicht. Für ein großes δ wie $\delta = 0.95$ ist die mit dieser Intervallschätzung assoziierte Sicherheit also eher hoch, die assoziierte Unsicherheit eher gering.

Anwendungsbeispiel

Beispiel | Evidenzbasierte Evaluation von Psychotherapie bei Depression

```
# Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter
delta    = 0.95                                    # Konfidenzlevel
n        = length(y)                               # Anzahl Datenpunkte
t_delta  = qt((1+delta)/2,n-1)                     # \psi^-1((\delta + 1)/2, n-1)
y_bar    = mean(y)                                 # Stichprobenmittel
s        = sd(y)                                   # Stichprobenstandardabweichung
mu_hat   = y_bar                                   # Erwartungswertparameterschätzer
mu_hat_u = y_bar - (s/sqrt(n))*t_delta             # untere Konfidenzintervallgrenze
mu_hat_o = y_bar + (s/sqrt(n))*t_delta             # obere  Konfidenzintervallgrenze
```

Das 0.95-Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter ist $[0.80, 5.52]$. Im langfristigen Mittel überdeckt so berechnetes Konfidenzintervall den wahren, aber unbekannten, Erwartungswertparameter in 95 von 100 Fällen.

```
# Konfidenzintervall für den Varianzparameter
delta        = 0.95                                # Konfidenzlevel
n            = length(y)                           # Anzahl Datenpunkte
u_delta      = qchisq((1-delta)/2, n - 1)          # \Xi^2((1-\delta)/2; n - 1)
u_delta_p    = qchisq((1+delta)/2, n - 1)          # \Xi^2((1+\delta)/2; n - 1)
s2           = var(y)                              # Stichprobenstandardabweichung
sigsqr_hat   = s2                                  # Varianzparameterschätzer
sigsqr_hat_u = (n-1)*s2/u_delta_p                  # untere KI Grenze
sigsqr_hat_o = (n-1)*s2/u_delta                    # obere KI Grenze
```

Das 0.95-Konfidenzintervall für den Varianzparameter ist $[6.91, 39.74]$. Im langfristigen Mittel überdeckt ein so berechnetes Konfidenzintervall den wahren, aber unbekannten, Varianzparameter in 95 von 100 Fällen.

Definition

Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter der Normalverteilung

Konfidenzintervall für den Varianzparameter der Normalverteilung

Anwendungsbeispiel

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie die Definition des Begriffs eines δ-Konfidenzintervalls wieder.
2. Erläutern Sie die zwei Interpretationen eines δ-Konfidenzintervalls.
3. Erläutern Sie die typischen Schritte zur Konstruktion eines δ-Konfidenzintervalls.
4. Geben Sie das Theorem zum KI des Erwartungswertparameters des Normalverteilungsmodells wieder.
5. Geben Sie das Theorem zum KI des Varianzparameters des Normalverteilungsmodells wieder.

Selbstkontrollfragen - Lösungen

1. Siehe Definition (δ-Konfidenzintervall).
2. Siehe Folie 9, *Zwei Interpretationen von δ-Konfidenzintervallen.*
3. Siehe Folie 10, *Allgemeine Konstruktion von Konfidenzintervallen.*
4. Siehe Theorem (Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter).
5. Siehe Theorem (Konfidenzintervall für den Varianzparameter).