



Programmierung und Deskriptive Statistik

BSc Psychologie WiSe 2024/25

Belinda Fleischmann

Datum	Einheit	Thema	Form
15.10.24	R Grundlagen	(1) Einführung	Seminar
22.10.24	R Grundlagen	(2) R und Visual Studio Code	Seminar
29.10.24	R Grundlagen	(2) R und Visual Studio Code	Übung
05.11.24	R Grundlagen	(3) Vektoren, (4) Matrizen	Seminar
12.11.24	R Grundlagen	(5) Listen und Dataframes	Seminar
	<i>Leistungsnachweis 1</i>		
19.11.24	R Grundlagen	(6) Datenmanagement	Seminar
26.11.24	R Grundlagen	(2)-(6) R Grundlagen	Übung
03.12.24	Deskriptive Statistik	(7) Häufigkeitsverteilungen	Seminar
10.12.24	Deskriptive Statistik	(8) Verteilungsfunktionen und Quantile	Seminar
	<i>Leistungsnachweis 2</i>		
17.12.24	Deskriptive Statistik	(9) Maße der zentralen Tendenz und Datenvariabilität	Seminar
	Weihnachtspause		
07.01.25	R Grundlagen	(10) Strukturiertes Programmieren: Kontrollfluss, Debugging	Seminar
14.01.25	Deskriptive Statistik	(11) Anwendungsbeispiel	Übung
	<i>Leistungsnachweis 3</i>		
21.01.25	Deskriptive Statistik	(11) Anwendungsbeispiel	Seminar
28.01.25	Deskriptive Statistik	(11) Anwendungsbeispiel, Q&A	Seminar

(11) Anwendungsbeispiel

Beispieldatensatz

Datenvorverarbeitung

Deskriptive Statistiken

Visualisierung

Parameterschätzung

Konfidenzintervalle

Hypothesentests

Beispieldatensatz

Datenvorverarbeitung

Deskriptive Statistiken

Visualisierung

Parameterschätzung

Konfidenzintervalle

Hypothesentests

Evidenzbasierte Evaluation von Psychotherapieformen bei Depression

Welche Therapieform ist bei Depression wirksamer?

Online Psychotherapie

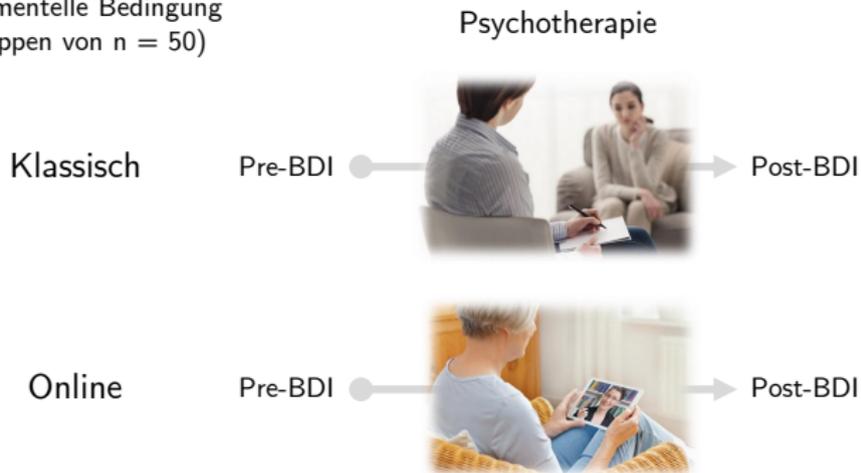


Klassische Psychotherapie



Beispiel: Evaluation von Psychotherapieformen bei Depression

Experimentelle Bedingung
(Gruppen von $n = 50$)



Mittel der Datenerhebung

Becks Depressions-Inventar (BDI) zur Depressionsdiagnostik

BDI-II Fragebogen		Alter	Berufschrift	Sexus
		_____	_____	_____
<p>Anleitung: Dieser Fragebogen enthält 53 Gruppen von Aussagen. Bitte lesen Sie jede dieser Gruppen von Aussagen sorgfältig durch und wählen Sie sich dann in jeder Gruppe eine Aussage heraus, die am besten beschreibt, wie Sie sich in den letzten zwei Wochen, einschließlich heute, gefühlt haben. Kennen Sie die Zeit neben der Aussage an, die Sie sich am Besten beschreiben können (1, 2 oder 3). Falls sich in einer Gruppe mehrere Aussagen gleichwohl auf Sie zurechnen lassen, so wählen Sie die Aussage mit der höheren Zahl an „Achten Sie bitte darauf, dass Sie in jeder Gruppe nicht mehr als eine Aussage ankreuzen, dies gilt auch für Gruppe 16 (Veränderungen der Schlafgewohnheiten) oder Gruppe 18 (Veränderungen des Appetits).</p>				
<p>1.) Traurigkeit</p> <p>0 Ich bin nicht traurig. 1 Ich bin oft traurig. 2 Ich bin ständig traurig. 3 Ich bin so traurig oder unglücklich, dass ich es nicht aushalte.</p>	<p>4.) Bestrahlungsgefühl</p> <p>0 Ich habe nicht das Gefühl, für etwas bestraft zu sein. 1 Ich habe das Gefühl, vielleicht bestraft zu werden. 2 Ich erwarte, bestraft zu werden. 3 Ich habe das Gefühl, bestraft zu sein.</p>			
<p>2.) pessimismus</p> <p>0 Ich sehe nicht mutlos in die Zukunft. 1 Ich sehe mutlos in die Zukunft als sonst. 2 Ich bin mutlos und erwarte nicht, dass meine Situation besser wird. 3 Ich glaube, dass meine Zukunft hoffnungslos ist und nur noch schlechter wird.</p>	<p>7.) Selbstabwertung</p> <p>0 Ich habe von mir genauso viel wie immer. 1 Ich habe Vertrauen in mich verloren. 2 Ich bin von mir enttäuscht. 3 Ich lehne mich völlig ab.</p>			
<p>3.) Versagensgefühle</p> <p>0 Ich fühle mich nicht als Versager. 1 Ich habe häufiger Versagensgefühle. 2 Wenn ich zurückblicke, sehe ich eine Menge Fehlschläge. 3 Ich habe das Gefühl, als Mensch ein völliger Versager zu sein.</p>	<p>8.) Selbstvorwürfe</p> <p>0 Ich kritisiere oder tadle mich nicht mehr als sonst. 1 Ich bin mir gegenüber kritischer als sonst. 2 Ich kritisiere mich für all meine Mängel. 3 Ich gebe mir die Schuld für alles Schlechte, was passiert.</p>			
<p>4.) Verlust von Freude</p> <p>0 Ich kann die Dinge genauso gut genießen wie früher. 1 Ich kann die Dinge nicht mehr so genießen wie früher. 2 Dinge, die mir früher Freude gemacht haben, kann ich kaum mehr genießen. 3 Ich habe keine Freude gemacht haben, kann ich überhaupt nicht mehr genießen.</p>	<p>9.) Selbstmordgedanken</p> <p>0 Ich denke nicht daran, mir etwas anzutun. 1 Ich denke manchmal an Selbstmord, aber ich würde es nicht tun. 2 Ich möchte mich am liebsten umbringen. 3 Ich würde mich umbringen, wenn ich die Gelegenheit überläße.</p>			
<p>5.) Schlafgefühle</p> <p>0 Ich habe keine besonderen Schlafgefühle. 1 Ich habe ein Schlafgefühl wegen Dingen, die ich getan habe oder hätte tun sollen. 2 Ich habe die meiste Zeit Schlafgefühle. 3 Ich habe ständig Schlafgefühle.</p>	<p>10.) Weinen</p> <p>0 Ich weine nicht öfter als früher. 1 Ich weine jetzt mehr als früher. 2 Ich weine beim geringsten Anlass. 3 Ich weine nicht.</p>			

<p>11.) Unruhe</p> <p>0 Ich bin nicht unruhiger als sonst. 1 Ich bin unruhiger als sonst. 2 Ich bin so unruhig, dass es mir schwerfällt, still zu sitzen. 3 Ich bin so unruhig, dass ich mich ständig bewegen oder etwas tun muss.</p>	<p>17.) Reizbarkeit</p> <p>0 Ich bin nicht reizbarer als sonst. 1 Ich bin reizbarer als sonst. 2 Ich bin viel reizbarer als sonst. 3 Ich fühle mich dauernd gereizt.</p>
<p>12.) Interessensverlust</p> <p>0 Ich habe das Interesse an anderen Menschen oder an Tätigkeiten nicht verloren. 1 Ich habe weniger Interesse an anderen Menschen oder an Dingen als sonst. 2 Ich habe das Interesse an anderen Menschen oder Dingen zum größten Teil verloren. 3 Es fällt mir schwer, mich überhaupt für irgend etwas zu interessieren.</p>	<p>18.) Veränderungen des Appetits</p> <p>0 Mein Appetit hat sich nicht verändert. 1a Mein Appetit ist viel schlechter als sonst. 1b Mein Appetit ist etwas größer als sonst. 2a Mein Appetit ist viel schlechter als sonst. 2b Mein Appetit ist viel größer als sonst. 3a Ich habe überhaupt keinen Appetit. 3b Ich habe ständig Heißhunger.</p>
<p>13.) Erschöpfungsfähigkeit</p> <p>0 Ich bin so erschöpfungsfähig wie immer. 1 Es fällt mir schwerer als sonst, Entscheidungen zu treffen. 2 Es fällt mir sehr viel schwerer als sonst, Entscheidungen zu treffen. 3 Ich habe Mühe, überhaupt Entscheidungen zu treffen.</p>	<p>19.) Konzentrationschwierigkeiten</p> <p>0 Ich kann mich so gut konzentrieren wie immer. 1 Ich kann mich nicht mehr so gut konzentrieren wie sonst. 2 Es fällt mir schwer, mich längere Zeit auf irgend etwas zu konzentrieren. 3 Ich kann mich überhaupt nicht mehr konzentrieren.</p>
<p>14.) Wertlosigkeit</p> <p>0 Ich fühle mich nicht wertlos. 1 Ich habe mich für weniger wertvoll und nützlich als sonst. 2 Vergleichen mit anderen Menschen fühle ich mich viel weniger wertlos. 3 Ich fühle mich völlig wertlos.</p>	<p>20.) Ermüdung oder Erschöpfung</p> <p>0 Ich fühle mich nicht müder oder erschöpfter als sonst. 1 Ich werde schneller müde oder erschöpft als sonst. 2 Für viele Dinge, die ich üblicherweise tue, bin ich zu müde oder erschöpft. 3 Ich bin so müde oder erschöpft, dass ich fast nichts mehr tun kann.</p>
<p>15.) Energieverlust</p> <p>0 Ich habe so viel Energie wie immer. 1 Ich habe weniger Energie als sonst. 2 Ich habe so wenig Energie, dass ich kaum noch etwas schaffe. 3 Ich habe keine Energie mehr, um überhaupt noch etwas zu tun.</p>	<p>21.) Verlust an sexuellem Interesse</p> <p>0 Mein Interesse an Sexualität hat sich in letzter Zeit nicht verändert. 1 Ich interessiere mich weniger für Sexualität als früher. 2 Ich interessiere mich jetzt viel weniger für Sexualität. 3 Ich habe das Interesse an Sexualität völlig verloren.</p>

0 - 8 keine Depression

9 - 13 minimale Depression

14 - 19 leichte Depression

20 - 28 mittelschwere Depression

29 - 63 schwere Depression

Beispieldatensatz

Einlesen des Datensatzes mit read.table()

```
file_path <- file.path(data_dir_path, "psychotherapie_datensatz.csv")  
  
# file_path könnte beispielsweise so aussehen:  
# "/home/username/uni/progr-und-deskr-stat-24/Daten/psychotherapie_datensatz.csv"  
  
D <- read.table(file_path, sep = ",", header = TRUE)
```

Daten der ersten acht Proband:innen jeder Gruppe

	Bedingung	Pre.BDI	Post.BDI
1	Klassisch	17	9
2	Klassisch	20	14
3	Klassisch	16	13
4	Klassisch	18	12
5	Klassisch	21	12
6	Klassisch	17	14
7	Klassisch	17	12
8	Klassisch	17	9
51	Online	22	16
52	Online	19	15
53	Online	21	13
54	Online	18	15
55	Online	19	13
56	Online	17	16
57	Online	20	13
58	Online	19	16

Bonus: Datensimulation

```
# Seed setzen
set.seed(5) # Startwert für den Zufallsgenerator setzen

# Simulationsparameter
n <- 50 # Proband:innen pro Gruppe
mu <- c( # Erwartungswertparameter
  18, 12, # Pre und Post der Gruppe Klassisch
  19, 14) # Pre und Post der Gruppe Online
sigsqr <- 3 # Varianzparameter (gleich für alle Gruppen)

# Datensimulation
D <- data.frame(
  "Bedingung" = c(
    rep("Klassisch", n), rep("Online", n)), # n-mal "Klassisch", n-mal "Online"
  "Pre BDI" = c(
    round(rnorm(n, mu[1], sqrt(sigsqr))), # n Zufallswerte aus Normalverteilung mit mu[1]
    round(rnorm(n, mu[3], sqrt(sigsqr))), # n Zufallswerte aus Normalverteilung mit mu[3]
  "Post BDI" = c(
    round(rnorm(n, mu[2], sqrt(sigsqr))), # n Zufallswerte aus Normalverteilung mit mu[2]
    round(rnorm(n, mu[4], sqrt(sigsqr)))) # n Zufallswerte aus Normalverteilung mit mu[4]
)

# Datenspeicherung
fname <- file.path(data_path, "psychotherapie_datensatz.csv")
write.csv(D, file = fname)
```

Beispieldatensatz

Datenvorverarbeitung

Deskriptive Statistiken

Visualisierung

Parameterschätzung

Konfidenzintervalle

Hypothesentests

Überlegungen für die Datenvorverarbeitung

- Studienfokus ist die **Veränderung** der Depressionsymptomatik durch Therapieformen.
- Für jede Proband:in ergibt sich diese Veränderung als **Differenz** zwischen Post.BDI und Pre.BDI.
- Eine Reduktion der Depressionssymptomatik ergibt dabei einen **negativen Wert**.
- Es ist intuitiver, Verbesserungen mit **positiven Zahlen** zu repräsentieren.
- Als Quantifizierung des Therapieeffekts bei Proband:in i bietet sich also folgendes Maß an

$$\Delta\text{BDI}[i] := -(\text{Post.BDI}[i] - \text{Pre.BDI}[i]) \quad (1)$$

- Wir betrachten in der Folge also das ΔBDI Maß mit folgenden Interpretationen
- | | | |
|------------------------|---|-----------------------|
| $\Delta\text{BDI} > 0$ | Verminderung der Depressionsymptomatik | Wirksame Therapie |
| $\Delta\text{BDI} = 0$ | Keine Veränderung der Depressionsymptomatik | Wirkungslose Therapie |
| $\Delta\text{BDI} < 0$ | Verstärkung der Depressionsymptomatik | Schädigende Therapie |

Hinzufügen einer Δ BDI Spalte zum Dataframe

```
fname      <- file.path(data_path, "psychotherapie_datensatz.csv")      # Einlesen
D          <- read.table(fname, sep = ",", header = TRUE)                # Rohdaten
D$Delta.BDI <- -(D$Post.BDI - D$Pre.BDI)                                # \Delta BDI Maß
```

Daten der ersten acht Proband:innen jeder Gruppe

	Bedingung	Pre.BDI	Post.BDI	Delta.BDI
1	Klassisch	17	9	8
2	Klassisch	20	14	6
3	Klassisch	16	13	3
4	Klassisch	18	12	6
5	Klassisch	21	12	9
6	Klassisch	17	14	3
7	Klassisch	17	12	5
8	Klassisch	17	9	8
51	Online	22	16	6
52	Online	19	15	4
53	Online	21	13	8
54	Online	18	15	3
55	Online	19	13	6
56	Online	17	16	1
57	Online	20	13	7
58	Online	19	16	3

Beispieldatensatz

Datenvorverarbeitung

Deskriptive Statistiken

Visualisierung

Parameterschätzung

Konfidenzintervalle

Hypothesentests

Bedingungsunabhängige Auswertung

```
# Initialisierung eines Dataframes
data      <- D$Delta.BDI
deskr_stat <- data.frame(
  n      = length(data),
  Max    = max(data),
  Min    = min(data),
  Median = median(data),
  Mean   = mean(data),
  Var    = var(data),
  Std    = sd(data)
)

# Datenvektor aus Dataframe kopieren
# Dataframeerzeugung
# Stichprobengröße
# Maximum
# Minimum
# Mediane
# Mittelwert
# Varianz
# Standardabweichung

print(deskr_stat) # Ausgabe
```

```
      n Max Min Median Mean      Var      Std
1 100 12 -1      6 5.54 5.826667 2.413849
```

Bedingungsabhängige Auswertung

```
# Initialisierung eines Dataframes
th_bed      <- c("Klassisch", "Online")
n_th_bed    <- length(th_bed)
deskr_stat  <- data.frame(
  n          = rep(NaN, n_th_bed),
  Max        = rep(NaN, n_th_bed),
  Min        = rep(NaN, n_th_bed),
  Median     = rep(NaN, n_th_bed),
  Mean       = rep(NaN, n_th_bed),
  Var        = rep(NaN, n_th_bed),
  Std        = rep(NaN, n_th_bed),
  row.names = th_bed
)

# Iterationen über Therapiebedingungen
for (i in seq_along(th_bed)){
  data      <- D$Delta.BDI[D$Bedingung == th_bed[i]]
  deskr_stat$n[i]      <- length(data)
  deskr_stat$Max[i]    <- max(data)
  deskr_stat$Min[i]    <- min(data)
  deskr_stat$Median[i] <- median(data)
  deskr_stat$Mean[i]   <- mean(data)
  deskr_stat$Var[i]    <- var(data)
  deskr_stat$Std[i]    <- sd(data)
}
```

Bedingungsabhängige Auswertung

```
# Ausgabe  
print(deskr_stat)
```

	n	Max	Min	Median	Mean	Var	Std
Klassisch	50	12	-1	6	6.16	7.075918	2.660060
Online	50	9	1	5	4.92	3.911837	1.977836

- Die Anzahl der Proband:innen in beiden Therapiegruppen ist gleich.
- Die Spannweite der Δ BDI Daten ist in der klassischen Therapieform leicht erhöht.
- Median und Mittelwert nehmen für die klassische Therapieform leicht höhere Werte an.
- Ein Δ BDI Mittelwertsunterschied von 1 ist klinisch wohl eher vernachlässigbar.
- Median und Mittelwert sind in beiden Therapieformen ähnlich (unimodale Verteilung).
- Die Variabilitätsmaße zeigen eine etwas erhöhte Variabilität in der klassischen Therapieform.

Beispieldatensatz

Datenvorverarbeitung

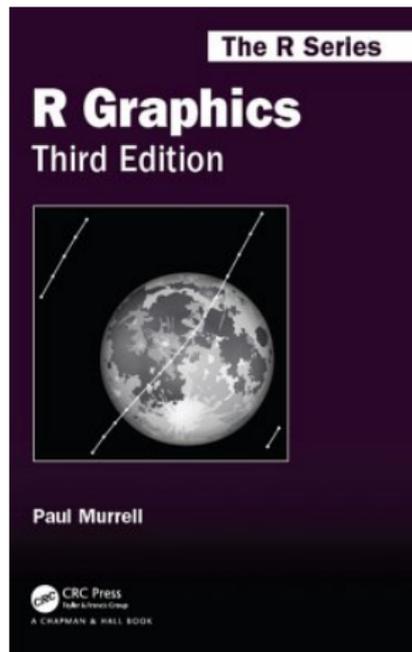
Deskriptive Statistiken

Visualisierung

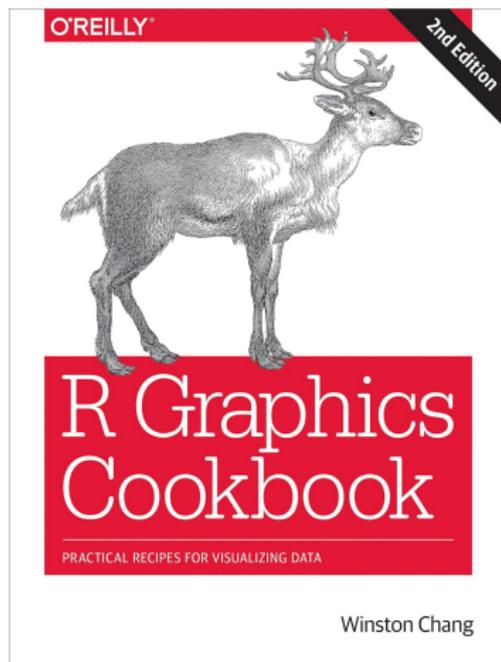
Parameterschätzung

Konfidenzintervalle

Hypothesentests



Murrell (2019)



Online-Buch, Chang (2013)

R Funktionalitäten für Abbildungen

Base Graphics

- Erstellung und bedarfsgerechte Anpassung von Abbildungen
- Eher low-level, fine tuning orientiert

Lattice und ggplot2

- Erstellung und bedarfsgerechte Anpassung von Abbildungen
- Eher high level, an der eigenen Philosophie orientiert

Base Graphics, lattice und ggplot2 können ähnliche Abbildungen generieren

LaTeX Typesetting ist in allen Paketen unterentwickelt

R Funktionalitäten für Abbildungen

Base Graphics

- **Erstellung und bedarfsgerechte Anpassung von Abbildungen**
- **Eher low-level, fine tuning orientiert**

Lattice und ggplot2

- Erstellung und bedarfsgerechte Anpassung von Abbildungen
- Eher high level, an der eigenen Philosophie orientiert

Base Graphics, lattice und ggplot2 können ähnliche Abbildungen generieren

LaTeX Typesetting ist in allen Paketen unterentwickelt

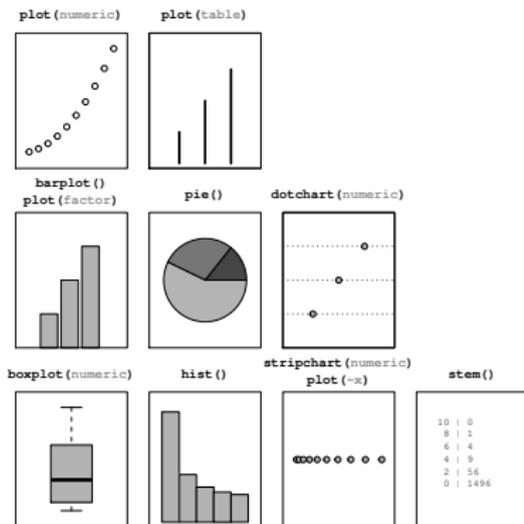


Figure 2.5
High-level base graphics plotting functions for producing plots of a single variable. Where the function can be used to produce more than one type of plot, the relevant data type is shown (in gray). For example, `plot(numeric)` means that this is what the `plot()` produces when it is given a single numeric argument.

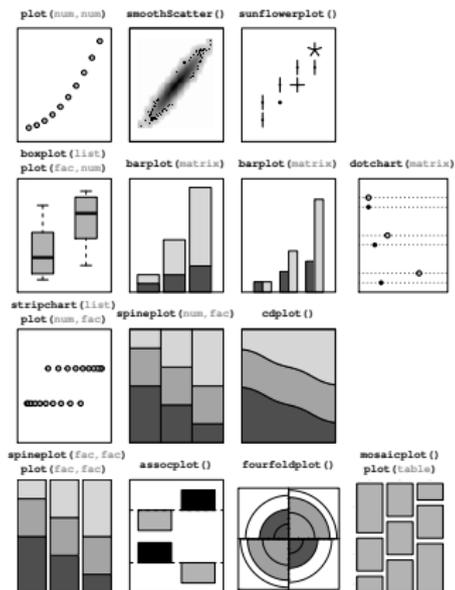


Figure 2.6
High-level base graphics plotting functions for producing plots of two variables. Where the function can be used to produce more than one type of plot, the relevant data type is shown (in gray). For example `plot(num, fac)` represents calling the `plot()` function with a numeric vector as the first argument and a factor as the second argument.

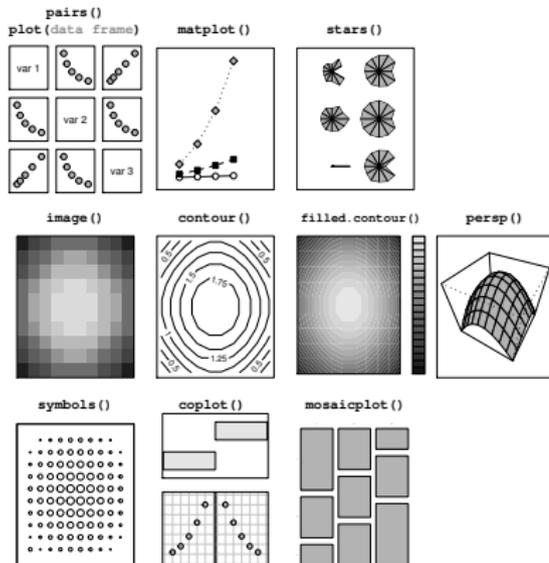


Figure 2.7

High-level base graphics plotting functions for producing plots of many variables. Where the function can be used to produce more than one type of plot, the relevant data type is shown (in gray).

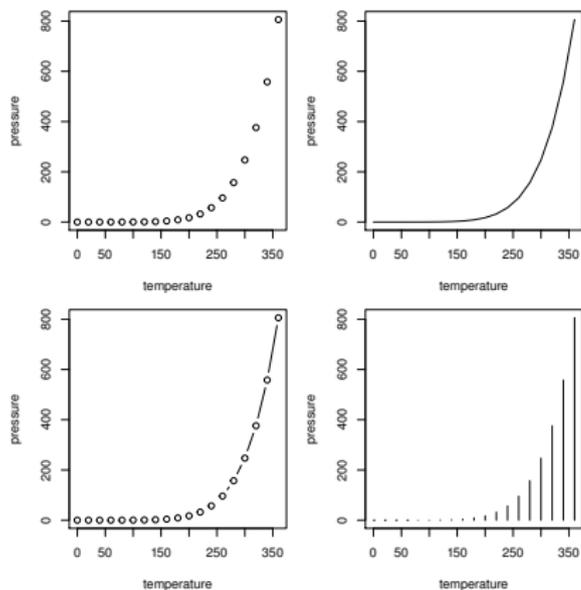


Figure 2.2

Four variations on a scatterplot. In each case, the plot is produced by a call to the `plot()` function with the same data; all that changes is the value of the `type` argument. At top-left, `type="p"` to give points (data symbols), at top-right, `type="l"` to give lines, at bottom-left, `type="b"` to give both, and at bottom-right, `type="h"` to give histogram-like vertical lines.

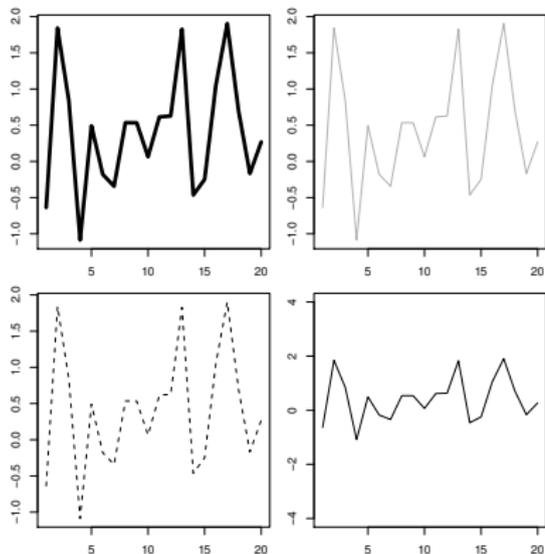


Figure 2.9

Standard arguments for high-level functions. All four plots are produced by calls to the `plot()` function with the same data, but with different standard plot function arguments specified: the top-left plot makes use of the `lwd` argument to control line thickness; the top-right plot uses the `col` argument to control line color; the bottom-left plot makes use of the `lty` argument to control line type; and the bottom-right plot uses the `ylim` argument to control the scale on the y-axis.

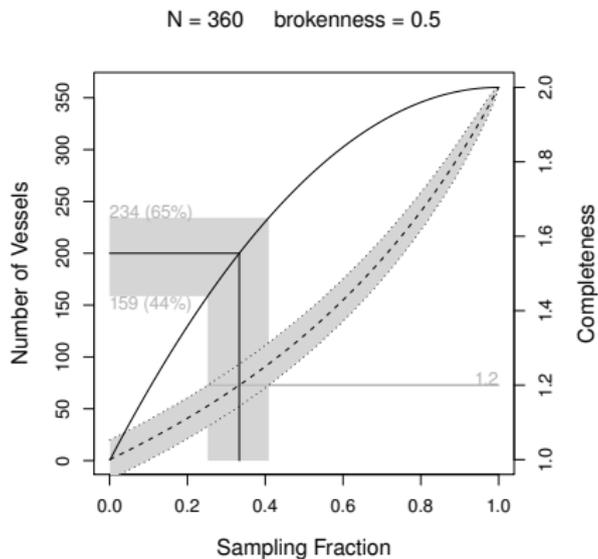


Figure 1.3

A customized scatterplot produced using R. This is created by starting with a simple scatterplot and augmenting it by adding an additional y-axis and several additional sets of lines, polygons, and text labels.

Murrell (2019)

Code Outline

```
# Initialisierung einer neuen Abbildung
dev.new()

# Abbildungsparameter
par(
  z.B. Arrangement von Panels, Begrenzungsstile, Schriftfonts, etc
)

# Higher-level Abbildungsfunktion wie plot(), hist(), barplot(), ...
plot(
  z.B. x- und y-Daten, Achsenlimits, Achsenbeschriftungen, Titel, Farben, etc.
  Jeder Aufruf einer higher-level Graphikfunktion belegt ein neues Subpanel!
)

# Hinzufügen weiterer Daten mit lower-level Abbildungsfunktionen zum aktuellen Panel
z.B. points(), lines(), abline()

# Weitere Graphikannotation zu aktuellem Panel
z.B. legend(), text()

# Speichern der Abbildung (Größenverhältnisse erst hier final festgelegt)
z.B. dev.copy2pdf()
```

Visualisierung

Visualisierung der bedingungsabhängigen Histogramme

```
# Histogrammparameter
h      <- 1
b_0    <- min(D$Delta.BDI)
b_k    <- max(D$Delta.BDI)
k      <- ceiling((b_k - b_0) / h)
b      <- seq(b_0, b_k, by = h)
ylimits <- c(0, .25)
xlimits <- c(-2, 14)
th_bed <- c("Klassisch", "Online")
labs   <- c("Klassische Therapie", "Online Therapie")

# gewünschte Klassenbreite
# b_0
# b_0
# Anzahl der Klassen
# Klassen [b_{j-1}, b_j[
# y-Achsenlimits
# x-Achsenlimits
# Therapiebedingungen
# Abbildungslabel

# Abbildungsparameter
par(
  mfcol      = c(1, 2),
  family     = "sans",
  pty       = "m",
  bty       = "l",
  las       = 1,
  xaxs     = "i",
  yaxs     = "i",
  font.main = 1,
  cex      = 1,
  cex.main = 1
)

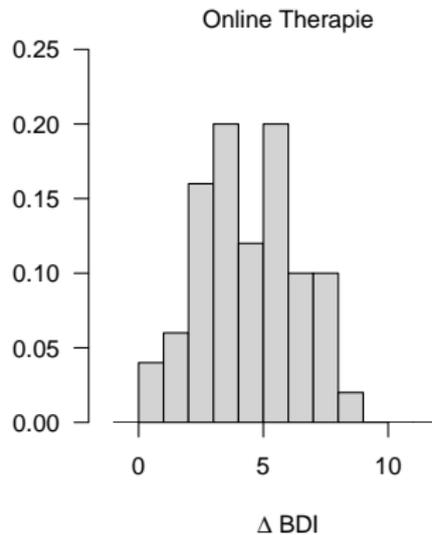
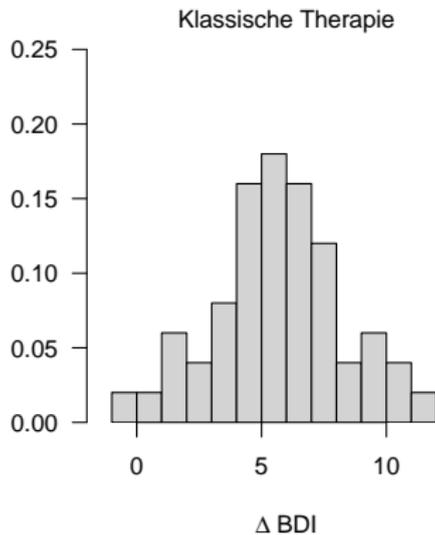
# für Details siehe ?par
# 1 x 2 Panelstruktur
# Serif-freier Fonttyp
# Maximale Abbildungsregion
# L förmige Box
# Horizontale Achsenbeschriftung
# x-Achse bei y = 0
# y-Achse bei x = 0
# Non-Bold Titel
# Textvergrößerungsfaktor
# Titeltextvergrößerungsfaktor

# Iteration über Therapiebedingungen
for(i in seq_along(th_bed)){
  hist(
    D$Delta.BDI[D$Bedingung == th_bed[i]],
    breaks = b,
    freq   = F,
    xlim   = xlimits,
    ylim   = ylimits,
    xlab   = TeX("$\\Delta$ BDI"),
    ylab   = "",
    main   = labs[i]
  )
}

# Delta.BDI Werte von Therapiebedingung i
# Histogrammklassen
# normierte relative Häufigkeit
# x-Achsenlimits
# y-Achsenlimits
# x-Achsenbeschriftung
# y-Achsenbeschriftung
# Titelbeschriftung

# PDF Speicherung
dev.copy2pdf(
  file = file.path(abb_dir, "pds_11_histogramm.pdf"),
  width = 8,
  height = 4
)
```

Visualisierung der bedingungsabhängigen Histogramme



Visualisierung bedingungsabhängiger deskriptiver Statistiken

```
# Abbildungsparameter
par(
  mfcol      = c(1,2),
  family     = "sans",
  pty       = "m",
  bty       = "l",
  las       = 1,
  xaxs      = "i",
  yaxs      = "i",
  font.main  = 1,
  cex       = 1,
  cex.main  = 1.5
)
# für Details siehe ?par
# 1 x 2 Panelstruktur
# Serif-freier Fonttyp
# Maximale Abbildungsregion
# L-förmige Box
# Horizontale Achsenbeschriftung
# x-Achse bei y = 0
# y-Achse bei x = 0
# Non-Bold Titel
# Textvergrößerungsfaktor
# Titeltextrößerungsfaktor
```

Visualisierung bedingungsabhängiger deskriptiver Statistiken

```
# Linkes Panel: Balkendiagramm mit Fehlerbalken
# -----

# Stichprobenmittelwert und Standardabweichung extrahieren
mw      <- deskr_stat$Mean      # Gruppenmittelwert
sd      <- deskr_stat$Std       # Gruppenstandardabweichung
names(mw) <- th_bed             # barplot braucht x-Werte als names

# Mit der Funktion barplot() ein Balkendiagramm plotten
x <- barplot(                   # Speichern der der x-Ordinaten (?barplot für Details)
  height = mw,                  # Mittelwerte als Balkenhöhe
  col     = "gray90",           # Balkenfarbe
  ylim    = c(0,12),           # y-Achsenbegrenzung
  xlim    = c(0,3),            # x-Achsenbegrenzung
  xlab    = "Bedingung",       # x-Achsenbeschriftung
  main    = TeX("$\\Delta$ BDI$") # Titel
)

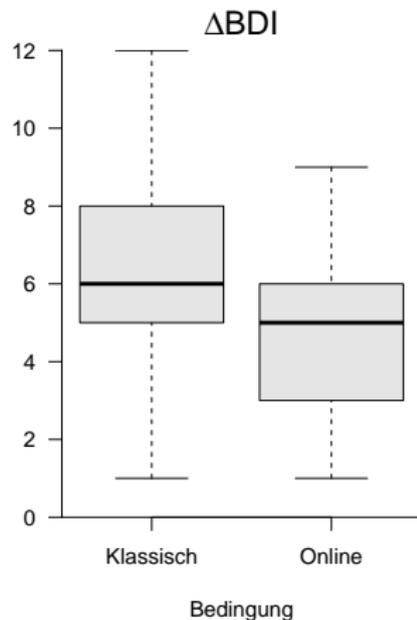
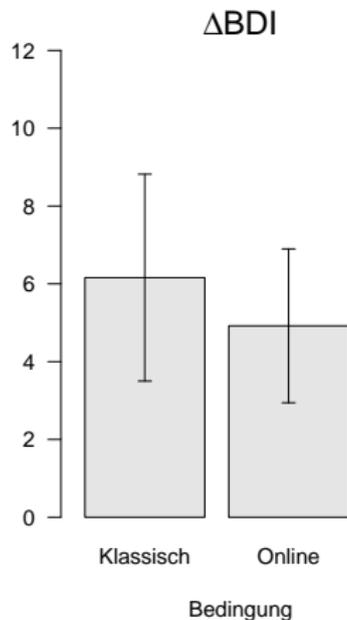
# Mit der Funktion arrows() Fehlerbalken zeichnen
arrows(
  x0      = x,                  # arrow start x-ordinate
  y0      = mw - sd,            # arrow start y-ordinate
  x1      = x,                  # arrow end x-ordinate
  y1      = mw + sd,            # arrow end y-ordinate
  code    = 3,                  # Pfeilspitzen beiderseits
  angle   = 90,                 # Pfeilspitzenwinkel -> Linie
  length  = 0.05                # Linielänge
)
```

Visualisierung bedingungsabhängiger deskriptiver Statistiken

```
# Rechtes Panel: Boxplot
# -----

# Mit der Funktion boxplot() boxplots zeichnen
boxplot(
  D$Delta.BDI ~ D$Bedingung,           # Gruppierung der Delta.BDI Daten nach D$Bedingung mit "~"
  ylim = c(0, 12),                   # y-Achsenbegrenzung
  col = "gray90",                     # Boxfarbe
  ylab = "",                           # y-Achsenbeschriftung
  xlab = "Bedingung",                 # x-Achsenbeschriftung
  main = TeX("$\\Delta$ BDI$")        # Titel
)
```

Visualisierung bedingungsabhängiger deskriptiver Statistiken



Beispieldatensatz

Datenvorverarbeitung

Deskriptive Statistiken

Visualisierung

Parameterschätzung

Konfidenzintervalle

Hypothesentests

Modellannahmen für Parameterschätzung und Konfidenzintervalle

Motiviert durch die therapieabhängige Visualisierung der Δ BDI-Daten und unseren wissenschaftssoziologischen Kontext legen wir das folgende Normalverteilungsmodell zugrunde:

Für die Δ BDI-Reduktion y_{ij} der j ten Proband:in in der i ten Therapiebedingung nehmen wir an:

$$y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij}, \quad \epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_i^2), \quad i = 1, 2, j = 1, \dots, 50. \quad (2)$$

Die Reduktion y_{ij} wird also durch eine innerhalb der i ten Therapiebedingung identische mittlere Reduktion $\mu_i \in \mathbb{R}$ und eine Proband:innen-spezifische normalverteilte Abweichung ϵ_{ij} erklärt.

Dieses Modell ist äquivalent zur Aussage:

$$y_{i1}, \dots, y_{i50} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2). \quad (3)$$

Innerhalb jeder Therapiebedingung werden die Δ BDI-Werte somit als unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen modelliert.

Die Standardproblemstellungen der Frequentistischen Inferenz führen zu folgenden Fragen:

1. Was sind sinnvolle Schätzwerte für die wahren, aber unbekannt Parameter μ_1, μ_2 und σ_1^2, σ_2^2 ?
2. Wie gelingt im Sinne einer Intervallschätzung eine möglichst sichere Schätzung dieser Parameter?
3. Entscheiden wir uns sinnvollerweise für die Hypothese, dass gilt $\mu_1 = \mu_2$?

Parameterschätzung

Zur Parameterschätzung im vorliegenden Modell nutzen wir

- den Maximum Likelihood Schätzer für μ_i
- den Varianzschätzer für σ_i^2

```
# Initialisierung eines Dataframes
th_bed <- c("Klassisch", "Online") # Therapiebedingungen
n_th_bed <- length(th_bed) # Anzahl Therapiebedingungen
theta_hats <- data.frame( # Dataframeerzeugung
  mu_ML = rep(NA, n_th_bed), # ML Schätzer für \mu_i
  sigsqr_VAR = rep(NA, n_th_bed) # Varianzschätzer für \sigma^2_i
)
# Iterationen über Therapiebedingungen
for(i in 1:n_th_bed){
  data <- D$Delta.BDI[D$Bedingung == th_bed[i]] # Daten
  theta_hats$mu_ML[i] <- mean(data) # ML Schätzer für \mu_i
  theta_hats$sigsqr_VAR[i] <- var(data) # Varianzschätzer für \sigma^2_i
}
# Ausgabe
print(theta_hats)
```

```
mu_ML sigsqr_VAR
1 6.16 7.075918
2 4.92 3.911837
```

Tipps für μ_i und σ_i^2 auf Grundlage dieser unverzerrten Schätzer sind also

$$\hat{\mu}_1 = 6.16, \quad \hat{\mu}_2 = 4.92, \quad \hat{\sigma}_1^2 = 7.08, \quad \hat{\sigma}_2^2 = 3.91. \quad (4)$$

Die mit diesen Tipps assoziierte Unsicherheit ist hier nicht angegeben.

Beispieldatensatz

Datenvorverarbeitung

Deskriptive Statistiken

Visualisierung

Parameterschätzung

Konfidenzintervalle

Hypothesentests

Konfidenzintervalle

Konfidenzintervalle für die Erwartungswertparameterschätzer

```
# Analyseparameter
th_bed <- c("Klassisch", "Online")
n_th_bed <- length(th_bed)
n <- 50

# Therapiebedingungen
# Anzahl an Therapiebedingungen
# Anzahl von Beobachtungen pro Therapiebedingung

kappa <- data.frame(
  G_u = rep(NA, n_th_bed),
  mu_hat = rep(NA, n_th_bed),
  G_o = rep(NA, n_th_bed),
  row.names = th_bed
)

# Dataframeerzeugung
# untere KI Grenze
# Erwartungswertparameterschätzer
# obere KI Grenze
# Therapiebedingungen

# Konfidenzintervallparameter
delta <- 0.95
t_delta <- qt((1 + delta) / 2, n - 1)

# Konfidenzintervallevaluation
for(i in 1:n_th_bed){
  data <- D$Delta.BDI[D$Bedingung == th_bed[i]]
  y_bar <- mean(data)
  S <- sd(data)
  kappa$G_u[i] <- y_bar - (S / sqrt(n)) * t_delta
  kappa$mu_hat[i] <- y_bar
  kappa$G_o[i] <- y_bar + (S / sqrt(n)) * t_delta
}

# Ausgabe
print(kappa)
```

	G_u	mu_hat	G_o
Klassisch	5.404019	6.16	6.915981
Online	4.357905	4.92	5.482095

Konfidenzintervalle für die Varianzparameterschätzer

```
# Analyseparameter
th_bed <- c("Klassisch", "Online")
n_th_bed <- length(th_bed)
n <- 50

# Therapiebedingungen
# Anzahl an Therapiebedingungen
# Anzahl von Beobachtungen pro Therapiebedingung

kappa <- data.frame(
  G_u = rep(NA, n_th_bed),
  sigsq_r_hat = rep(NA, n_th_bed),
  G_o = rep(NA, n_th_bed),
  row.names = th_bed
)

# Dataframeerzeugung
# untere KI Grenze
# Varianzparameterschätzer
# obere KI Grenze
# Therapiebedingungen

# Konfidenzintervallparameter
delta <- 0.95
u_delta <- qchisq((1 - delta) / 2, n - 1)
u_delta_p <- qchisq((1 + delta) / 2, n - 1)

# Konfidenzintervallevaluation
for(i in 1:n_th_bed){
  data <- D$Delta.BDI[D$Bedingung == th_bed[i]]
  S2 = var(data)
  kappa$G_u[i] = (n - 1) * S2 / u_delta_p
  kappa$sigsqr_hat[i] = S2
  kappa$G_o[i] = (n - 1) * S2 / u_delta
}

# Stichprobenrealisierung
# Stichprobenvarianz
# untere KI Grenze
# Varianzparameterschätzer
# obere KI Grenze

# Ausgabe
print(kappa)
```

	G_u	sigsqr_hat	G_o
Klassisch	4.937455	7.075918	10.987828
Online	2.729613	3.911837	6.074489

Beispieldatensatz

Datenvorverarbeitung

Deskriptive Statistiken

Visualisierung

Parameterschätzung

Konfidenzintervalle

Hypothesentests

(1) Anwendungsszenario und (2) Frequentistisches Inferenzmodell

Was ist das zugrundeliegende Statistische Modell?

Wir nehmen an, dass die Δ BDI Werte, also der uns vorliegende Datensatz Realisierungen von unabhängig verteilten Zufallsvariablen

$$y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2), i = 1, 2, j = 1, \dots, 50 \quad (5)$$

sind, wobei i die Therapiebedingung ($1 =$ Klassisch, $2 =$ Online) und j den Proband:innen Index in der i ten experimentellen Bedingung bezeichnen. Innerhalb einer Bedingung sind diese Zufallsvariablen also unabhängig und identisch verteilt.

Motivation für Hypothesentests

Die Parameter μ_1, μ_2 und σ^2 sind unbekannt. Basierend auf unserem Datensatz schätzen wir Werte für die Parameter. Da wir davon ausgehen, dass eine Realisierung von Zufallsvariablen *Zufälligkeit* enthält, können wir uns nicht *sicher* sein, dass diese Schätzungen die wahren Parameterwerte widerspiegeln. Deshalb möchten wir die mit unserer Schätzung verbundenen Unsicherheit beim inferentiellen Vergleich von μ_1 mit μ_2 quantifizieren.

Geeigneter Hypothesentest für vorliegende Forschungsfrage

Dafür können wir einen Zweistichproben-T-Test bei unabhängigen Stichproben unter Annahme identischer Varianz durchführen.

Wir wollen die Hypothesen $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ und $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ mit einem Signifikanzniveau von $\alpha_0 = 0.05$ testen und verwenden dafür einen **zweiseitigen Zweistichproben-T-Test**.

(3) Testhypothesen

Was sind geeignete Null- und Alternativhypothesen? Was soll der Typ-I Fehler sein?

Wir betrachten die einfache Nullhypothese und die zusammengesetzte Alternativhypothese

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \quad (6)$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0. \quad (7)$$

Mit $\mu_0 = 0$ ist das äquivalent zu

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad (8)$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad (9)$$

(4) Definition und (5) Verteilung der Teststatistik

Was ist der „Testgegenstand“? Was ist die Kenngröße, die getestet wird?

Die T-Teststatistik für den Zweistichproben-T-Test ist gegeben durch

$$T = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \left(\frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \mu_0}{s_{12}} \right) \quad (10)$$

und dessen Verteilung durch

$$T \sim t(d, n_1 + n_2 - 2) \quad (11)$$

mit Nichtzentralitätsparameter

$$d = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \left(\frac{\mu_1 - \mu_2 - \mu_0}{\sigma} \right). \quad (12)$$

wobei \bar{y}_1 und \bar{y}_2 die Stichprobenmittel der Gruppen Klassische und Online-Therapie, respektive sind, n_1 und n_2 die jeweiligen Stichprobengrößen und $s_{12} = \sqrt{s_{12}^2}$ die *gepoolte Stichprobenstandardabweichung*. Die *gepoolte Stichprobenvarianz* ist gegeben durch

$$s_{12}^2 := \frac{\sum_{j=1}^{n_1} (y_{1j} - \bar{y}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (y_{2j} - \bar{y}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad (13)$$

(6) Testdefinition

Wie funktioniert der Test?

$$\phi(\mathbf{y}) := \mathbf{1}_{\{|T| \geq k\}} = \begin{cases} 1 & |T| \geq k \\ 0 & |T| < k \end{cases}. \quad (14)$$

(7) Testgütefunktion

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test den Wert 1 ergibt unter verschiedenen möglichen wahren, aber unbekanntem Parameterwerten?

Theorem (Testgütefunktion des Zweistichproben-T-Tests)

Es sei ϕ der im obigen Modell formulierte Zweistichproben-T-Test. Dann ist die Testgütefunktion von ϕ gegeben durch

$$q_\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1], (\mu_1, \mu_2) \mapsto q_\phi(\mu_1, \mu_2) := 1 - \psi(k; d_\mu, n_1 + n_2 - 2) + \psi(-k; d_\mu, n_1 + n_2 - 2) \quad (15)$$

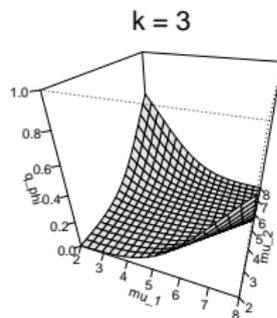
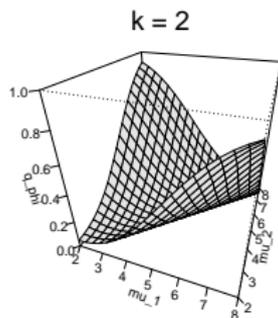
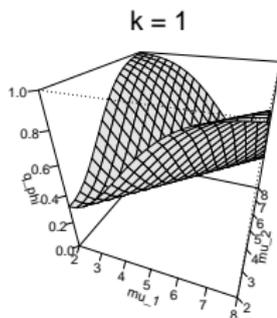
wobei $\psi(\cdot; d_\mu, n_1 + n_2 - 2)$ die KVF der nichtzentralen t -Verteilung mit Nichtzentralitätsparameter

$$d_\mu := \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} \quad (16)$$

und Freiheitsgradparameter $n_1 + n_2 - 2$ bezeichnet.

(7) Testgütefunktion

$q_\phi(\mu_1, \mu_2) = \mathbb{P}_\mu(\phi(y) = 1)$ für $\sigma^2 = 3$, $\mu_0 = 0$, $n_1 = 50$, $n_2 = 50$ und $k = 1, 2, 3$.



(8) Testumfangkontrolle

Wie kann ich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Test den Wert 1 ergibt, obwohl der Nullhypothesenparameterwert „wahr“ wäre (Typ-I Fehler) kontrollieren?

Theorem (Testumfangkontrolle)

ϕ sei der im obigen Testscenario definierte Test. Dann ist ϕ ein Level- α_0 -Test mit Testumfang α_0 , wenn der kritische Wert definiert ist durch

$$k_{\alpha_0} := \psi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha_0}{2}; n_1 + n_2 - 2\right), \quad (17)$$

wobei $\psi^{-1}(\cdot; n_1 + n_2 - 2)$ die inverse KVF der t -Verteilung mit $n_1 + n_2 - 2$ Freiheitsgraden ist.

Zweistichproben-T-Test: Manuelle Berechnung basierend auf den zugrunde liegenden Formeln

```
# Datenauswahl
y_1      <- D$Delta.BDI[D$Bedingung == "Klassisch"]      # \Delta.BDI Daten Klassische Therapie
y_2      <- D$Delta.BDI[D$Bedingung == "Online"]        # \Delta.BDI Daten Online Therapie
n_1      <- length(y_1)                                  # Stichprobengröße n_1
n_2      <- length(y_2)                                  # Stichprobengröße n_2
alpha_0  <- 0.05                                         # Signifikanzniveau
mu_0     <- 0                                            # H_0 Hypothesenparameter, hier \mu_0 = 0
k_alpha_0 <- qt(1 - (alpha_0 / 2), n_1 + n_2 - 2)        # kritischer Wert
y_bar_1  <- mean(y_1)                                    # y_bar_1
y_bar_2  <- mean(y_2)                                    # y_bar_2
s_12     <- sqrt(
  (sum((y_1 - y_bar_1)^2) + sum((y_2 - y_bar_2)^2)) /    # gepoolte Standardabweichung s_12
  (n_1 + n_2 - 2)
)
t        <- sqrt(
  (n_1 * n_2) / (n_1 + n_2)                             # Zweistichproben-T-Teststatistik
  * ((y_bar_1 - y_bar_2 - mu_0) / s_12)
)
if (abs(t) >= k_alpha_0) {
  phi <- 1                                              # Test 1_{|T| >= k_alpha_0}
} else {
  phi <- 0                                              # Ablehnen von H_0
}
pval     <- 2 * (1 - pt(abs(t), n_1 + n_2 - 2))        # p-Wert (pt() hat default ncp=0)
```

Hypothesentest

Zweistichproben-T-Test: Manuelle Berechnung basierend auf den zugrunde liegenden Formeln

```
# Ausgabe
cat("\ny_bar_1          = ", y_bar_1,
    "\ny_bar_2          = ", y_bar_2,
    "\nFreiheitsgrade    = ", n_1 + n_2 - 2,
    "\nSignifikanzlevel   = ", alpha_0,
    "\nKritischer Wert    = ", k_alpha_0,
    "\nTeststatistik      = ", t,
    "\nTestwert           = ", phi,
    "\np-Wert             = ", pval)
```

```
y_bar_1          = 6.16
y_bar_2          = 4.92
Freiheitsgrade   = 98
Signifikanzlevel = 0.05
Kritischer Wert  = 1.984467
Teststatistik    = 2.645162
Testwert         = 1
p-Wert           = 0.00951137
```

Folgendes können wir aus dieser Zusammenfassung ablesen:

- Die Stichprobenmittel der zwei Datensätze sind 6.16 und 4.92
- Die Anzahl der Freiheitsgrade ist 98
- Das Signifikanzniveau dieses Tests α_0 ist 0.05
- Der kritische Wert k_{α_0} ist 1.98
- Die T-Teststatistik T hat den Wert 2.65
- Das Ergebnis des Tests ϕ ist 1 (Wie zu erwarten, da hier $T > k_{\alpha_0}$)
- \Rightarrow Wir lehnen die Nullhypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ab.
- Der p-Wert beträgt 0.00951

Zweistichproben-T-Tests: R Implementation

```
# R Implementation des Zweistichproben-T-Test
varphi = t.test( # ?t.test für Details
  y_1,          # Datensatz y_1
  y_2,          # Datensatz y_2
  var.equal = TRUE, # \sigma_1^2 = \sigma_2^2
  alternative = c("two.sided"), # H_1: \mu_1 \neq \mu_2
  conf.level = 1 - alpha_0) # \delta = 1 - \alpha_0 (sic!)

# Ausgabe
print(varphi)
```

Two Sample t-test

```
data: y_1 and y_2
t = 2.6452, df = 98, p-value = 0.009511
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.3097205 2.1702795
sample estimates:
mean of x mean of y
 6.16      4.92
```

Folgendes können wir aus dieser Zusammenfassung ablesen:

- Es wurden die Daten verwendet, die in den Variablen y_1 und y_2 gespeichert sind.
- Die T-Teststatistik T hat den Wert 2.65
- Die Anzahl der Freiheitsgrade, engl.: degrees of freedom (df) ist 98
- Die Alternativhypothese ist, dass die "wahre" Differenz zwischen μ_1 und μ_2 nicht gleich 0 ist.
- Das 95%-Konfidenzintervall der geschätzten Erwartungswertdifferenz ist $[0.31, 2.17]$.
- Die Stichprobenmittel der zwei Datensätze sind 6.16 und 4.92
- Der p-Wert beträgt (gerundet) 0.01.
- \Rightarrow Da dieser Wert kleiner als das festgelegte Signifikanzniveau 0.05 ist, kann die Nullhypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ abgelehnt werden.

Zweistichproben-T-Tests: R Implementation

Die Werte, die in der automatischen Ausgabe angezeigt werden sind gerundet. Die exakten Werte sind jedoch im Objekt `varphi` gespeichert und wir können diese aufrufen.

```
# Genauere Ausgabe t  
paste(varphi[1])
```

```
[1] "c(t = 2.64516155336263)"
```

```
# Genauere Ausgabe p  
paste(varphi[3])
```

```
[1] "0.00951137026459394"
```

Programmierübungen und Selbstkontrollfragen

1. Führe alle in dieser Einheit gezeigten Datenanalysen selbstständig durch und halte sie in einem strukturierten R-Skript fest.
2. Simuliere einen Beispieldatensatz mit Daten einer Evaluation von 3 verschiedenen Psychotherapieformen bei Depression mit 100 Versuchspersonen pro Gruppe und zwei Messzeitpunkten (vor Intervention und nach Intervention).
3. Variiere die Parameter der Simulationen für zwei Szenarien, in denen jeweils in *nur einer* Gruppe im Mittel ein Unterschied zwischen Pre- und Post-BDI-Werten besteht.
4. Berechne die bedingungsabhängigen deskriptiven Statistiken und visualisiere diese.
5. Berechne die Parameterschätzer für Erwartungswert und Varianz und bestimme deren Konfidenzintervalle.
6. Erläutere die zugrundeliegenden Modellannahmen im Rahmen der Frequentistischen Inferenz.
7. Wählen Sie zwei Gruppen, und führen Sie einen Zweistichproben-T-Test durch, um die Hypothese testen, dass ein Unterschied in der BDI-Veränderung zwischen diesen Gruppen besteht. Wählen Sie dafür sinnvolle Null- und Alternativhypothesen. Welche Annahmen müssen Sie vor Durchführung des Tests treffen?
8. Erläutere die zugrundeliegenden Modellannahmen im Rahmen der Frequentistischen Inferenz.

Chang, Winston. 2013. *R Graphics Cookbook*. Beijing Cambridge Farnham Köln Sebastopol Tokyo: O'Reilly.
Murrell, Paul. 2019. *R Graphics*. Third edition. The R Series. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.