

### (3) Eigenanalyse

Ziel dieser Sitzung ist es, die Begriffe der Eigenanalyse, Orthonormalzerlegung und Singulärwertzerlegung in **R** anhand der in der Vorlesung diskutierten Beispiele nachzuvollziehen.

#### Eigenwerte und Eigenvektoren

Wir betrachten das in der Vorlesung betrachtete Beispiel zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren. In **R** erlaubt der Befehl `eigen()` die Eigenanalyse einer quadratischen Matrix.

```
# Matrixdefinition
A = matrix(c(2,1,
            1,2),
           nrow = 2,
           byrow = TRUE)

# Eigenanalyse
EA = eigen(A)

# Eigenwerte von A
print(EA$values)
```

```
[1] 3 1
```

```
# Eigenvektoren von A
print(EA$vectors)
```

```
      [,1]      [,2]
[1,] 0.7071068 -0.7071068
[2,] 0.7071068  0.7071068
```

Für ein tieferes intuitives Verständnis können die Eigenvektoren einer  $2 \times 2$  Matrix mithilfe folgenden **R** Codes visualisiert werden. Die resultierende Abbildung ist als Abbildung 1 dargestellt.

```
library(latex2exp)

# Abbildungsparameter
par(
  family = "sans",
  mfcol = c(1,1),
  pty = "s",
  bty = "l",
  lwd = 1,
```

```

las      = 1,
mgp      = c(2,1,0),
xaxs     = "i",
yaxs     = "i",
font.main = 1,
cex      = 0.95,
cex.main = 1.2)

# Plot-Objekt
plot(NULL,
      xlab = TeX("$x_1$"),
      ylab = TeX("$x_2$"),
      xlim = c(-2.6,2.6),
      ylim = c(-2.6,2.6))
grid()

# Pfeildarstellung der Eigenvektoren von A
arrows(
  x0      = c(0,0),
  y0      = c(0,0),
  x1      = c(EA$ectors[1,1], EA$ectors[2,1]),
  y1      = c(EA$ectors[1,2], EA$ectors[2,2]),
  angle   = 20,
  length  = 0.1,
  lwd     = 2,
  col     = c("black", "black"),
  xpd     = TRUE)

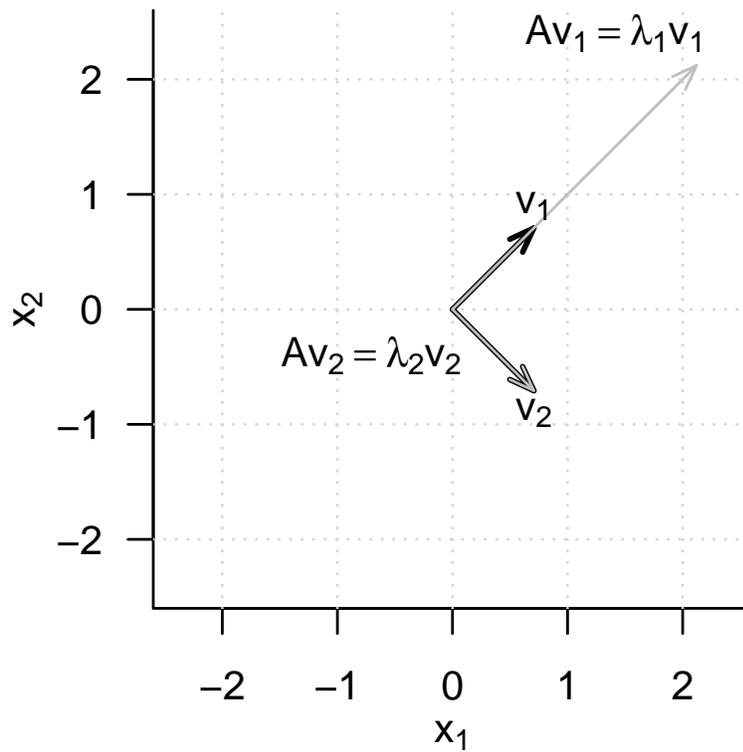
# Ausgabe der Matrixprodukte Av_1, Av_2
Av_1 = A %*% EA$ectors[,1]
Av_2 = A %*% EA$ectors[,2]
print(Av_1)
print(Av_2)

# Pfeildarstellung der Matrixprodukte Av_1, Av_2
arrows(
  x0      = c(0,0),
  y0      = c(0,0),
  x1      = c(Av_1[2,1], Av_2[2,1]),
  y1      = c(Av_1[1,1], Av_2[1,1]),
  angle   = 20,
  length  = 0.1,
  lwd     = 1,
  col     = c("gray", "gray"),
  xpd     = TRUE)

# Annotation
text( 1/sqrt(2), 0.9, TeX("$v_1$"))
text( 1/sqrt(2), -0.9, TeX("$v_2$"))
text( 2/sqrt(2), 2.4, TeX("$Av_1 = \\lambda_1 v_1$"))
text(-1/sqrt(2), -0.4, TeX("$Av_2 = \\lambda_2 v_2$"))

```

```
# PDF-Speicherung
dev.copy2pdf(
  file      = "./Abbildungen/eigenvektoren.pdf",
  width     = 4,
  height    = 4)
dev.off()
```



**Abbildung 1.** Visualisierung von Eigenvektoren einer  $2 \times 2$  Matrix

## Orthonormalzerlegung

Wie in der Vorlesung diskutiert, können die Ergebnisse der Eigenanalyse der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

aufgrund ihrer Symmetrie und bei Wahl von normierten Eigenvektoren für eine Orthonormalzerlegung von  $A$  genutzt werden. Diese Einsicht wird in folgendem **R**-Code reproduziert.

```
# Eigenanalyse der Beispielmatrix
A = matrix(c(2,1,
            1,2),
           nrow = 2,
           byrow = TRUE)
EA = eigen(A)

# Überprüfung der Länge der von R ermittelten Eigenvektoren
cat( "Länge von v_1:", sqrt(t(EA$ectors[,1]) %*% EA$ectors[,1]),
     "\nLänge von v_2:", sqrt(t(EA$ectors[,2]) %*% EA$ectors[,2]), "\n")
```

```
Länge von v_1: 1
Länge von v_2: 1
```

```
# Definition der Orthonormalzerlegungsmatrizen
Q = EA$ectors
Lambda = diag(EA$values)

# Validierung der Orthonormalzerlegung von A
A = Q %*% Lambda %*% t(Q)
print(A)
```

```
      [,1] [,2]
[1,]    2    1
[2,]    1    2
```

## Singulärwertzerlegung

Zuletzt wollen wir den in der Vorlesung hergestellten Zusammenhang zwischen der Singulärwertzerlegung und der Eigenanalyse einer Matrix mithilfe des **R**-Befehls `svd()` an einem Beispiel verdeutlichen.

```
# Definition einer 2 x 3 Matrix Y
Y = matrix(c(1,2,3,
            4,5,6),
          nrow = 2,
          byrow = TRUE)
print(Y)
```

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    2    3
[2,]    4    5    6
```

```
# Singulärwertzerlegung von Y mithilfe von svd()
USV = svd(Y)
U = USV$u
S = diag(USV$d)
V = USV$v

# Eigenanalyse von YY^T mithilfe von eigen()
EAYYT = eigen(Y %*% t(Y))
print(EAYYT$vectors)
```

```
      [,1]      [,2]
[1,] 0.3863177 -0.9223658
[2,] 0.9223658  0.3863177
```

```
print(EAYYT$values)
```

```
[1] 90.4026725  0.5973275
```

```
print(U)
```

```
      [,1]      [,2]
[1,] -0.3863177 -0.9223658
[2,] -0.9223658  0.3863177
```

```
print(diag(S) ** 2)
```

```
[1] 90.4026725  0.5973275
```

```
# Eigenanalyse von  $Y^T Y$  mithilfe von eigen() und Fokus auf die von Null verschiedenen Eigenwerte
EAYTY = eigen(t(Y) %*% Y)
print(EAYTY$vectors[,1:2])
```

```
      [,1]      [,2]
[1,] -0.4286671  0.8059639
[2,] -0.5663069  0.1123824
[3,] -0.7039467 -0.5811991
```

```
print(EAYTY$values[1:2])
```

```
[1] 90.4026725  0.5973275
```

```
print(V)
```

```
      [,1]      [,2]
[1,] -0.4286671  0.8059639
[2,] -0.5663069  0.1123824
[3,] -0.7039467 -0.5811991
```

```
print(diag(S) ** 2)
```

```
[1] 90.4026725  0.5973275
```