



Multivariate Verfahren

MSc Psychologie & MSc Klinische Psychologie und Psychotherapie
Wintersemester 2024/2025

Joram Soch

(2) Matrizen

Motivation

Matrizen sind die Worte der Sprache der Datenanalyse.

Vektoren sind nur spezielle Matrizen. (Skalare sind nur spezielle Vektoren.)

Matrizen können als Tabellen der Datenrepräsentation dienen.

Matrizen können lineare Abbildungen repräsentieren.

Matrizen können Vektorräume repräsentieren.

⇒ Ein sicherer Umgang mit Matrizen ist für das Verständnis
moderner datenanalytischer Verfahren unverzichtbar.

Definition

Operationen

Inverse

Determinanten

Spur

Selbstkontrollfragen

Definition

Operationen

Inverse

Determinanten

Spur

Selbstkontrollfragen

Definition (Matrix)

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen, die wie folgt bezeichnet wird:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} := (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}. \quad (1)$$

Bemerkungen

- Matrizen bestehen aus *Zeilen (rows)* und *Spalten (columns)*.
- Die Matrixeinträge a_{ij} werden mit einem *Zeilenindex* i und einem *Spaltenindex* j indiziert.

- Zum Beispiel gilt für $A := \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 0 & 9 \\ 9 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, dass $a_{32} = 4$.

Bemerkungen (fortgeführt)

- Die *Größe* oder *Dimension* einer Matrix ergibt sich aus der Anzahl ihrer Zeilen $n \in \mathbb{N}$ und Spalten $m \in \mathbb{N}$.
- Matrizen mit $n = m$ heißen *quadratische Matrizen*.
- In der Folge benötigen wir nur Matrizen mit reellen Einträgen, also $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für alle $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$.
- Wir nennen die Matrizen mit reellen Einträge *reelle Matrizen*.
- Die Menge der reellen Matrizen mit n Zeilen und m Spalten bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^{n \times m}$.
- Aus dem Ausdruck $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ lesen wir ab, dass A eine reelle Matrix mit zwei Zeilen und drei Spalten ist.
- Wir identifizieren die Menge $\mathbb{R}^{1 \times 1}$ mit der Menge \mathbb{R} .
- Wir identifizieren die Menge $\mathbb{R}^{n \times 1}$ mit der Menge \mathbb{R}^n .
- Reelle Matrizen mit einer Spalte und n Zeilen sind also dasselbe wie n -dimensionale reelle Vektoren.

Definition

Operationen

Inverse

Determinanten

Spur

Selbstkontrollfragen

Matrixoperationen

Man kann mit Matrizen rechnen.

In der Folge betrachten wir folgende grundlegende Matrixoperationen:

- Addition und Subtraktion von Matrizen gleicher Größe (Matrixaddition und Matrixsubtraktion)
- Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar (Skalarmultiplikation)
- Vertauschen der Zeilen- und Spaltenanordnung (Matrixtransposition)
- Multiplikation einer Matrix mit einer passenden zweiten Matrix (Matrixmultiplikation)
- "Division" durch eine quadratische Matrix (Matrixinversion)

Definition (Matrixaddition)

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann ist die *Addition* von A und B definiert als die Abbildung

$$+ : \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}, (A, B) \mapsto +(A, B) := A + B \quad (2)$$

mit

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

Bemerkungen

- Nur Matrizen identischer Größe können miteinander addiert werden.
- Die Addition zweier gleich großer Matrizen ist *elementweise* definiert.

Definition (Matrixsubtraktion)

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann ist die *Subtraktion* von A und B definiert als die Abbildung

$$- : \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}, (A, B) \mapsto -(A, B) := A - B \quad (4)$$

mit

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1m} - b_{1m} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2m} - b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \cdots & a_{nm} - b_{nm} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Bemerkungen

- Nur Matrizen identischer Größe können voneinander subtrahiert werden.
- Die Subtraktion zweier gleich großer Matrizen ist *elementweise* definiert.

Operationen

Beispiel

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ definiert als

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Da A und B gleich groß sind, können wir sie addieren

$$\begin{aligned} C := A + B &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+4 & -3+1 & 0+0 \\ 1-4 & 6+2 & 5+0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

und voneinander subtrahieren

$$\begin{aligned} D := A - B &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-4 & -3-1 & 0-0 \\ 1+4 & 6-2 & 5-0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Definition (Skalarmultiplikation)

Es sei $c \in \mathbb{R}$ ein Skalar und $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann ist die *Skalarmultiplikation* von c und A definiert als die Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}, (c, A) \mapsto \cdot(c, A) := cA \quad (9)$$

mit

$$cA = c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1m} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nm} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Bemerkungen

- Die Skalarmultiplikation ist *elementweise* definiert.

Beispiel

Es seien $c := -3$ und $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ definiert als

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Dann ergibt sich

$$B := cA = -3 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 3 & -3 \cdot 1 & -3 \cdot 1 \\ -3 \cdot 5 & -3 \cdot 2 & -3 \cdot 5 \\ -3 \cdot 2 & -3 \cdot 7 & -3 \cdot 1 \\ -3 \cdot 3 & -3 \cdot 4 & -3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -3 \\ -15 & -6 & -15 \\ -6 & -21 & -3 \\ -9 & -12 & -6 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Theorem (Vektorraum $\mathbb{R}^{n \times m}$)

Das Tripel $(\mathbb{R}^{n \times m}, +, \cdot)$ mit der oben definierten Matrixaddition und Skalarmultiplikation ist ein Vektorraum. Insbesondere gelten also für $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $r, s, t \in \mathbb{R}$ folgende Rechenregeln:

(1) Kommutativität der Addition	$A + B = B + A$
(2) Assoziativität der Addition	$(A + B) + C = A + (B + C)$
(3) Existenz eines neutralen Elements der Addition	$\exists 0 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $A + 0 = 0 + A = A$
(4) Existenz inverser Elemente der Addition	$\forall A \exists -A$ mit $A + (-A) = 0$
(5) Existenz eines neutralen Elements der Skalarmultiplikation	$\exists 1 \in \mathbb{R}$ mit $1 \cdot A = A$
(6) Assoziativität der Skalarmultiplikation	$r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t$
(7) Distributivität hinsichtlich der Matrixaddition	$r \cdot (A + B) = r \cdot A + r \cdot B$
(8) Distributivität hinsichtlich der Skalarmultiplikation	$(r + s) \cdot A = r \cdot A + s \cdot A$

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Der Beweis ergibt sich mit dem elementweisen Charakter von $+$, $-$, \cdot und den Rechenregeln in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
- Das neutrale Element der Addition heißt *Nullmatrix*; wir schreiben $0_{nm} := (0)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ mit $0 \in \mathbb{R}$.
- Die inversen Elemente der Addition sind durch $-A := (-a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ gegeben.
- Das neutrale Element der Skalarmultiplikation ist $1 \in \mathbb{R}$.

Definition (Matrixtransposition)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann ist die *Transposition* von A definiert als die Abbildung

$$\cdot^T : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}, A \mapsto \cdot^T(A) := A^T \quad (13)$$

mit

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Bemerkungen

- Die Matrixtransposition "vertauscht" Zeilen und Spalten.
- Das Transponieren einer Matrix wird auch als *Stürzen einer Matrix* bezeichnet ([Animation](#)).
- Für $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gilt immer $A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- Für $A \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ gilt immer $A^T = A$.
- Es gilt $(A^T)^T = A$.
- Es gilt $(a_{ii})_{1 \leq i \leq \min(n,m)} = (a_{ii})_{1 \leq i \leq \min(n,m)}^T$.
- Matricelemente auf der Hauptdiagonalen einer Matrix bleiben bei Transposition also unberührt.

Beispiel

Es sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Dann gilt $A^T \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ und speziell

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Weiterhin gilt offenbar $\min(m, n) = 2$ und folglich

$$(a_{11}) = (a_{11})^T \quad \text{und} \quad (a_{22}) = (a_{22})^T. \quad (17)$$

Definition (Matrixmultiplikation)

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$. Dann ist die *Matrixmultiplikation* von A und B definiert als die Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{m \times k} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times k}, (A, B) \mapsto \cdot(A, B) := AB \quad (18)$$

mit

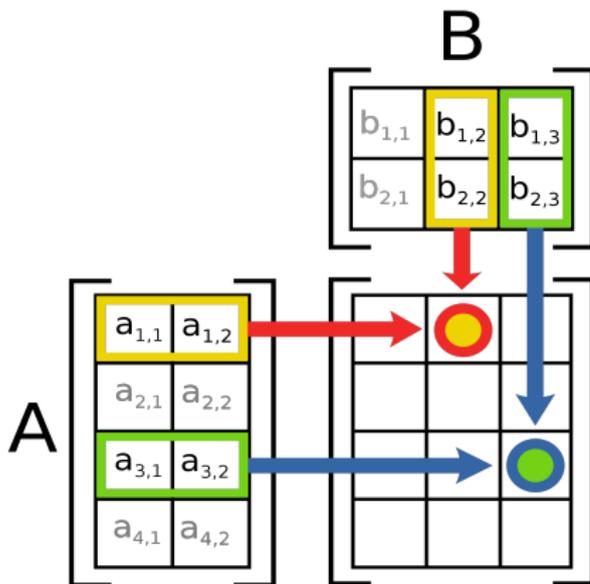
$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m a_{1i} b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{1i} b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{1i} b_{ik} \\ \sum_{i=1}^m a_{2i} b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{2i} b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{2i} b_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m a_{ni} b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{ni} b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{ni} b_{ik} \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^m a_{ji} b_{il} \right)_{1 \leq j \leq n, 1 \leq l \leq k} \end{aligned} \quad (19)$$

Bemerkungen

- Das Matrixprodukt AB ist nur dann definiert, wenn A genau so viele Spalten hat wie B Zeilen.
- Informell gilt für die beteiligten Matrixgrößen immer $(n \times m)(m \times k) = (n \times k)$.
- In AB ist $(AB)_{ij}$ die Summe der multiplizierten i ten Zeilen von A und j ten Spalten von B .
- Zum Berechnen von $(AB)_{ij}$ für $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$ geht man also wie folgt vor:
 1. Man legt in Gedanken die Transposition der i ten Zeile von A über die j te Spalte von B .
 2. Weil A genau m Spalten hat und B genau m Zeilen hat, gibt es zu jedem Element der Zeile aus A ein korrespondierendes Element in der Spalte von B .
 3. Man multipliziert die korrespondierenden Elemente miteinander.
 4. Man summiert die Ergebnisse auf.
 5. Dies ist der Eintrag mit Index ij in AB .
- Die Multiplikation von Matrizen ist im Allgemeinen nicht kommutativ (also meist $AB \neq BA$).

Operationen

Visualisierung der Matrixmultiplikation



(Quelle: *Wikimedia Commons*: "Matrix_multiplication_diagram_2.svg"; Lizenz: GNU Free, CC-BY-SA 3.0.)

Beispiel

$A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ seien definiert als

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Wir wollen $C := AB$ und $D := BA$ berechnen.

Mit $n = 2, m = 3$ und $k = 2$ wissen wir schon, dass $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, weil

$$(2 \times 3)(3 \times 2) = (2 \times 2) \quad (21)$$

und

$$(3 \times 2)(2 \times 3) = (3 \times 3) \quad (22)$$

Es gilt hier also sicher $AB \neq BA$.

Beispiel (fortgeführt)

Es ergibt sich zum einen

$$\begin{aligned}C &= AB \\&= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + (-3) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 6 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} & (23) \\&= \begin{pmatrix} 8 + 3 + 0 & 4 + 0 + 0 \\ 4 - 6 + 5 & 2 + 0 + 15 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 3 & 17 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Beispiel (fortgeführt)

Es ergibt sich zum anderen

$$D = BA$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 & 4 \cdot 0 + 2 \cdot 5 \\ (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 & (-1) \cdot (-3) + 0 \cdot 6 & (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 6 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} & (24) \\ &= \begin{pmatrix} 8 + 2 & -12 + 12 & 0 + 10 \\ -2 + 0 & 3 + 0 & 0 + 0 \\ 2 + 3 & -3 + 18 & 0 + 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 \\ -2 & 3 & 0 \\ 5 & 15 & 15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Theorem (Matrixmultiplikation und Skalarprodukt)

Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\langle x, y \rangle = x^T y. \quad (25)$$

Weiterhin seien für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Spalten von A^T für $i = 1, \dots, m$ gegeben durch

$$\bar{a}_i := (a_{ji})_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n \quad (26)$$

und für $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ die Spalten von B für $i = 1, \dots, k$ gegeben durch

$$\bar{b}_j := (b_{ij})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n, \quad (27)$$

also

$$A^T = (\bar{a}_1 \quad \bar{a}_2 \quad \dots \quad \bar{a}_m) \quad \text{und} \quad B = (\bar{b}_1 \quad \bar{b}_2 \quad \dots \quad \bar{b}_k). \quad (28)$$

Dann gilt

$$AB = (\langle \bar{a}_i, \bar{b}_j \rangle)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k} \quad (29)$$

Bemerkungen

- Der Eintrag $(AB)_{ij}$ entspricht dem Skalarprodukt von i ter Spalte von A^T und j ter Spalte von B .
- Die erste Aussage folgt mit der Identifikation von $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$.
- Wir verzichten auf einen ausführlichen Beweis.

Theorem (Summe der Quadrate aller Einträge eines Vektors)

Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionaler Vektor. Dann kann die Summe der Quadrate aller Einträge dieses Vektors durch die Matrixmultiplikation des transponierten Vektors mit sich selbst berechnet werden:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = x^T x . \quad (30)$$

Bemerkungen

- Es handelt sich hierbei um einen Spezialfall der ersten Aussage des vorherigen Theorems.
- Im Rahmen des ALM ist das Theorem nützlich, um z.B. die residuelle Quadratsumme auszudrücken.

Beweis

$$x^T x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (31)$$

□

Theorem (Matrixmultiplikation und Transposition)

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Dann gilt:

$$(AB)^T = B^T A^T. \quad (32)$$

Beweis

$$\begin{aligned} (AB)^T &= \left(\left(\sum_{i=1}^n a_{ji} b_{il} \right)_{1 \leq j \leq m, 1 \leq l \leq k} \right)^T \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} b_{li} \right)_{1 \leq j \leq m, 1 \leq l \leq k} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n b_{li} a_{ij} \right)_{1 \leq l \leq k, 1 \leq j \leq m} \\ &= B^T A^T \end{aligned} \quad (33)$$

□

Definition

Operationen

Inverse

Determinanten

Spur

Selbstkontrollfragen

Motivation für Begriff der Inversen einer quadratischen Matrix

- Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^n$, A und b seien als bekannt vorausgesetzt, x sei unbekannt.
- Zum Beispiel sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$
- In diesem Fall gilt $Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 1x_1 + 2x_2 & = & 5 \\ 3x_1 + 4x_2 & = & 11 \end{array}$
- Wir haben also ein *lineares Gleichungssystem* (LGS) mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten.
- Wir stellen uns vor, dass wir wissen möchten, für welche(s) x das LGS erfüllt ist.
- Wären $A = a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$, also $ax = b$ gegeben, so würden wir mit dem *multiplikativen Inversen* von a multiplizieren, also dem Wert, der mit a multipliziert 1 ergibt und durch $a^{-1} = \frac{1}{a}$ gegeben ist.
- Dann würde nämlich gelten $ax = b \Leftrightarrow a^{-1}ax = a^{-1}b \Leftrightarrow 1 \cdot x = a^{-1}b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$
- Konkret etwa $2x = 6 \Leftrightarrow 2^{-1}2x = 2^{-1}6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}2x = \frac{1}{2}6 \Leftrightarrow x = 3$.
- Analog möchte man mit dem *multiplikativen Inversen* A^{-1} von A multiplizieren können, sodass " $A^{-1}A = 1$ ".
- Dann hätte man nämlich $Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$
- Diese Idee des multiplikativen Inversen wird im folgenden als *Inverse einer quadratischen Matrix* formalisiert.

Definition (Einheitsmatrix)

Die Matrix A mit $a_{ij} = 1$ für $i = j$ und $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$

$$I_n := (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

heißt *n*-dimensionale Einheitsmatrix.

Bemerkungen

- Die Einheitsmatrix ist eine quadratische Matrix, bei alle diagonalen Einträge 1 und alle anderen Einträge 0 sind.
- I_n wird in R mit dem Befehl `diag(n)` erzeugt.

Theorem (Neutrales Element der Matrixmultiplikation)

I_n ist das neutrale Element der Matrixmultiplikation, d.h. es gilt für $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, dass

$$I_n A = A \text{ und } A I_m = A. \quad (35)$$

Bemerkungen

- Ist die Matrixmultiplikation der Einheitsmatrix mit einer anderen Matrix definiert, so bleibt letztere dabei unverändert und die Einheitsmatrix "verschwindet" aus dem Produkt.

Beweis

Es sei $B = (b_{ij}) = I_n A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann gilt für alle $1 \leq i \leq n$ und alle $1 \leq j \leq m$

$$b_{ij} = 0 \cdot a_{1j} + 0 \cdot a_{2j} + \dots + 0 \cdot a_{i-1,j} + 1 \cdot a_{ij} + 0 \cdot a_{i+1,j} + \dots + 0 \cdot a_{nj} = a_{ij} \quad (36)$$

und analog für $A I_m$. □

Definition (Invertierbare Matrix und inverse Matrix)

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *invertierbar*, wenn es eine quadratische Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, sodass

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n \quad (37)$$

ist. Die Matrix A^{-1} heißt die *inverse Matrix von A*.

Bemerkungen

- Invertierbarkeit und inverse Matrizen beziehen sich nur auf quadratische Matrizen.
- Die inverse Matrix von A heißt auch einfach *Inverse* von A .
- Quadratische Matrizen können, müssen aber nicht invertierbar sein.
- Nicht-invertierbare Matrizen nennt man *singuläre* Matrizen.
- Für $A = a \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ gilt $A^{-1} = \frac{1}{a}$.
- Die Definition sagt nur aus, was eine inverse Matrix ist, aber nicht, wie man sie berechnet.

Beispiel für eine invertierbare Matrix

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 \\ 3.0 & 4.0 \end{pmatrix}$ ist invertierbar mit inverser Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$, denn

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 \\ 3.0 & 4.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.6 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 \\ 3.0 & 4.0 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

wovon man sich durch Nachrechnen überzeugt.

Beispiel für eine nicht-invertierbare Matrix

Die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht invertierbar, denn wäre B invertierbar, dann gäbe es $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Das würde aber bedeuten, dass $0 = 1$ in \mathbb{R} und das ist ein Widerspruch. Also kann B nicht invertierbar sein.

Theorem (Inverse einer 2×2 Matrix)

$A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sei eine Matrix der folgenden Form:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Dann gilt: Wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, dann existiert die Inverse von A und ist gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Bemerkungen

- Die Inverse einer 2×2 Matrix lässt sich mithilfe einer einfachen Formel berechnen.
- Die Inverse einer 2×2 Matrix vertauscht die Diagonalelemente und multipliziert die Nicht-Diagonalelemente mit -1 . Das Ergebnis wird dann noch durch die Determinante der Ausgangsmatrix geteilt (siehe nächster Abschnitt).

Beweis

Für den Fall, dass $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, muss gezeigt werden, dass $A^{-1}A = I_2$. Es gilt:

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & a_{22}a_{12} - a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} - a_{11}a_{21} & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & 0 \\ 0 & \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_2. \end{aligned} \tag{42}$$

□

Berechnen inverser Matrizen

- 2×2 bis etwa 5×5 Matrizen kann man prinzipiell per Hand invertieren.
- Dazu lernt man im Bachelor-Studium Mathematik verschiedene Verfahren.
- Wir verzichten auf eine Einführung in die Matrizeninvertierung per Hand.
- Ein kurzes (30 min) Erklärvideo (englisch) [findet sich hier](#).
- In der Anwendung werden Matrizen standardmäßig numerisch invertiert.
- Matrixinversion ist ein weites Feld in der numerischen Mathematik.
- Es gibt sehr viele Algorithmen zur Invertierung invertierbarer Matrizen.
- In R berechnet man inverse Matrizen zum Beispiel mit dem Paket `matlib`.

Definition

Operationen

Inverse

Determinanten

Spur

Selbstkontrollfragen

Definition (Determinante)

Für $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n > 1$ sei $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ die Matrix, die aus A durch Entfernen der i ten Zeile und der j ten Spalte entsteht. Dann heißt die Zahl

$$\begin{aligned} |A| &:= a_{11} && \text{für } n = 1 \\ |A| &:= \sum_{j=1}^n a_{1j}(-1)^{1+j}|A_{1j}| && \text{für } n > 1 \end{aligned} \quad (43)$$

die *Determinante* von A .

Bemerkungen

- Für

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad (44)$$

ergeben sich zum Beispiel

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \quad (45)$$

- Determinanten sind nichtlineare Abbildungen der Form $|\cdot| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto |A|$.

Theorem (Determinanten von 2×2 und 3×3 Matrizen)

(1) Es sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Dann gilt

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (46)$$

(2) Es sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Dann gilt

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (47)$$

Bemerkungen

- Die Determinante einer 1×1 Matrix ist identisch mit ihrem einzigen Eintrag.
- Für 2×2 und 3×3 Matrizen (und nur für diese) gilt die *Sarrusche Merkregel*:
"Summe der Produkte auf den Diagonalen minus Summe der Produkte auf den Gegendiagonalen"
- Bei 3×3 Matrizen bezieht sich die Merkregel auf das Schema

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right). \quad (48)$$

Determinanten

Beweis

Für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gilt nach Definition

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j=1}^n a_{1j}(-1)^{1+j}|A_{1j}| \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}|A_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}|A_{12}| \\ &= a_{11}|(a_{22})| - a_{12}|(a_{21})| \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned} \tag{49}$$

Für $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gilt nach Definition und mit der Formel für die Determinante von 2×2 Matrizen

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j=1}^n a_{1j}(-1)^{1+j}|A_{1j}| \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}|A_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}|A_{12}| + a_{13}(-1)^{1+3}|A_{13}| \\ &= a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \tag{50}$$

□

Determinanten

Beispiel 1

Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Dann ergeben sich

$$|A| = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 8 - 3 = 5 \quad (52)$$

und

$$|B| = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0 - 0 = 0. \quad (53)$$

Beispiel 2

Es sei

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Dann ergibt sich

$$|C| = 2 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 0 = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6. \quad (55)$$

Theorem (Rechenregeln für Determinanten)

(1) (*Determinantenmultiplikationssatz*) Für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$|AB| = |A||B|. \quad (56)$$

(2) (*Transposition*) Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$|A| = |A^T|. \quad (57)$$

(3) (*Inversion*) Für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad (58)$$

(4) (*Dreiecksmatrizen*) Für Dreiecksmatrizen, d.h. eine Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $a_{ij} = 0$ für $i > j$ oder $a_{ij} = 0$ für $j > i$, ist die Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente:

$$|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii} \quad (59)$$

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Bei Dreiecksmatrizen sind alle Elemente unterhalb ($i > j$) oder oberhalb ($j > i$) der Diagonalen 0.
- Bei I_n sind alle nicht-diagonalen Elemente 0 und alle diagonalen Elemente 1, also folgt $|I_n| = 1$.

Theorem (Invertierbarkeit und Determinante)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist dann und nur dann invertierbar, wenn $|A| \neq 0$ ist. Es gilt also

$$A \text{ ist invertierbar} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \quad \text{und} \quad A \text{ ist nicht invertierbar} \Leftrightarrow |A| = 0. \quad (60)$$

Beweisandeutung

Wir zeigen lediglich, dass aus der Invertierbarkeit von A folgt, dass $|A|$ nicht null sein kann. Nehmen wir also an, dass A invertierbar ist. Dann gibt es eine Matrix B mit $AB = I_n$ und mit dem Determinantenmultiplikationssatz folgt

$$|AB| = |A||B| = |I_n| = 1. \quad (61)$$

Also kann nicht $|A| = 0$ gelten, denn sonst wäre $0 = 1$. □

Determinanten

Visuelle Intuition

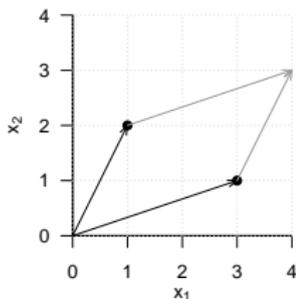
$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ seien die Spalten von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$\Rightarrow |A|$ entspricht dem signierten Volumen des von $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelotops.

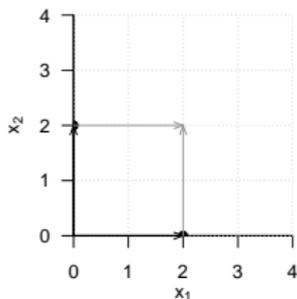
$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

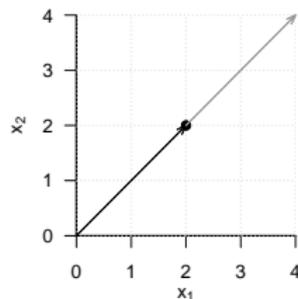
$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$



$$|A_1| = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5$$



$$|A_2| = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4$$



$$|A_3| = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0$$

Anekdote: Herkunft des Ausdrucks "Matrix"



James Joseph Sylvester (1814 – 1897)

(Quelle: *Wikimedia Commons*: "James_Joseph_Sylvester.jpg"; Lizenz: gemeinfrei.)

Definition

Operationen

Inverse

Determinanten

Spur

Selbstkontrollfragen

Definition (Spur)

A sei eine quadratische Matrix. Dann ist die *Spur* von A definiert als die Zahl

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}. \quad (62)$$

Bemerkungen

- tr ist die Abkürzung für das englische *trace*.
- Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Diagonalelemente.
- In R kann die Spur einer Matrix mit $\operatorname{sum}(\operatorname{diag}(A))$ berechnet werden.

Beispiel

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad (63)$$

Dann gilt

$$\operatorname{tr}(A) = 3 + 1 + 2 = 6. \quad (64)$$

Theorem (Eigenschaften der Spur)

(1) (*Invarianz bei Transposition*) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt

$$\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A) \quad (65)$$

(2) (*Linearität*) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\operatorname{tr}(cA + dB) = c \operatorname{tr}(A) + d \operatorname{tr}(B) \quad (66)$$

(3) (*Reihenfolgeninvarianz*) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gilt

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA). \quad (67)$$

(4) (*Zyklische Permutationsinvarianz*) Es seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt

$$\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(CAB) = \operatorname{tr}(BCA). \quad (68)$$

Bemerkung

- Eigenschaft (4) kann auf beliebig viele und multiplikationskonforme Matrizen erweitert werden.
- Weiterhin gilt: Die Spur der n -dimensionalen Einheitsmatrix ist: $\operatorname{tr}(I_n) = n$.

Spur

Beweis

(1) Da die Diagonalelemente von A^T und A identisch sind, sind auch ihre Summen identisch.

(2) Es gilt

$$\operatorname{tr}(cA + dB) = \sum_{i=1}^n (ca_{ii} + db_{ii}) = c \sum_{i=1}^n a_{ii} + d \sum_{i=1}^n b_{ii} = c \operatorname{tr}(A) + d \operatorname{tr}(B). \quad (69)$$

(3) Nach Definition der Matrixmultiplikation sind die Diagonalelemente von $AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch

$$(AB)_{ii} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{ji} \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad (70)$$

und die Diagonalelemente von $BA \in \mathbb{R}^{m \times m}$ durch

$$(BA)_{jj} = \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} \quad \text{für } j = 1, \dots, m \quad (71)$$

gegeben. Dann aber gilt mit den Eigenschaften von Summen und der Kommutativität der Skalarmultiplikation:

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^m (BA)_{jj} = \operatorname{tr}(BA). \quad (72)$$

(4) Mit der Assoziativität der Matrixmultiplikation und Eigenschaft (3) gelten

$$\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}((AB)C) = \operatorname{tr}(C(AB)) = \operatorname{tr}(CAB) = \operatorname{tr}((CA)B) = \operatorname{tr}(B(CA)) = \operatorname{tr}(BCA). \quad (73)$$

□

Definition

Operationen

Inverse

Determinanten

Spur

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie die Definition einer Matrix wieder.
2. Nennen Sie sechs Matrixoperationen.
3. Geben Sie die Definitionen der Matrixaddition und -subtraktion wieder.
4. Geben Sie die Definition der Skalarmultiplikation für Matrizen wieder.
5. Geben Sie die Definition der Matrixtransposition wieder.

6. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } c := 2 \quad (74)$$

Berechnen Sie

$$D := c(A - B^T) \text{ und } E := (cA)^T + B \quad (75)$$

per Hand.

7. Geben Sie die Definition der Matrixmultiplikation wieder.
8. Es seien $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ und $C \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$. Prüfen Sie, ob folgende Matrixprodukte definiert sind, und wenn ja, geben Sie die Größe der resultierenden Matrix an:

$$ABC, \quad ABC^T, \quad A^T C B^T, \quad BAC. \quad (76)$$

Selbstkontrollfragen

9. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (77)$$

Berechnen Sie die Matrixprodukte

$$AB, \quad B^T A^T, \quad (B^T A^T)^T, \quad AC \quad (78)$$

per Hand.

10. Definieren Sie die Begriffe der invertierbaren Matrix und der inversen Matrix.
11. Geben Sie die Formel zur Berechnung der Determinante einer 2×2 Matrix wieder.
12. Geben Sie die Definition der Spur einer Matrix wieder.
13. Geben Sie die Definition von Einheitsmatrizen und Nullmatrizen wieder.
14. Geben Sie die Definition von Einheitsmatrix und Einheitsvektoren wieder.
15. Geben Sie die Definition einer Diagonalmatrix wieder.
16. Geben Sie die Definition einer symmetrischen Matrix wieder.
17. Geben Sie die Definition einer positiv-definiten Matrix wieder.
18. Geben Sie die Definition einer orthogonalen Matrix wieder.

