Mathematische Grundlagen

BSc Psychologie | MSc Psychologie

MSc Klinische Psychologie und Psychotherapie

WiSe 2024/25

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(7) Vektorrechnung

Reeller Vektorraum

Euklidischer Vektorraum

Selbstkontrollfragen

Reeller Vektorraum

Euklidischer Vektorraum

Selbstkontrollfragen

Reeller Vektorraum

Definition (Vektorraum)

Es seien V eine nichtleere Menge und S eine Menge von Skalaren. Weiterhin sei eine Abbildung

$$+ : V \times V \to V, (v_1, v_2) \mapsto +(v_1, v_2) =: v_1 + v_2, \tag{1}$$

genannt *Vektoraddition*, definiert. Schließlich sei eine Abbildung

$$\cdot : S \times V \to V, (s, v) \mapsto \cdot(s, v) =: sv, \tag{2}$$

genannt *Skalarmultiplikation* definiert. Dann wird das Tupel $(V, S, +, \cdot)$ genau dann *Vektorraum* genannt, wenn für beliebige Elemente $v, w, u \in V$ und $a, b \in S$ folgende Bedingungen gelten:

(1) Kommutativität der Vektoraddition	$v + w = w + v$
(2) Assoziativität der Vektoraddition	$(v + w) + u = v + (w + u)$
(3) Existenz eines neutralen Elements der Vektoraddition	$\exists\, 0 \in V$ mit $v + 0 = 0 + v = v.$
(4) Existenz inverser Elemente der Vektoraddition	$\forall v \in V\, \exists -v \in V$ mit $v + (-v) = 0.$
(5) Existenz eines neutralen Elements der Skalarmultiplikation	$\exists\, 1 \in S$ mit $1 \cdot v = v.$
(6) Assoziativität der Skalarmultiplikation	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$
(7) Distributivität hinsichtlich der Vektoraddition	$a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w.$
(8) Distributivität hinsichtlich der Skalaraddition	$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v.$

Reeller Vektorraum

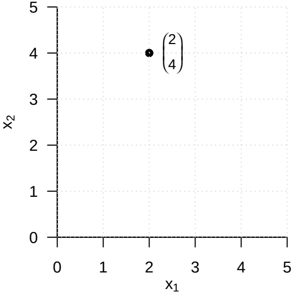
Bemerkungen

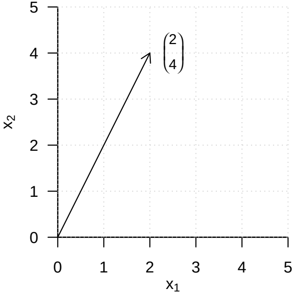
- Es gibt viele sehr verschiedene Vektorräume
- Beispiele für Mengen, auf denen eine Vektorraumstruktur definiert werden kann, sind
  - Die Menge der Matrizen
  - Die Menge der Polynome
  - Die Menge der Lösungen eines linearen Gleichungssystems
  - Die Menge der reellen Folgen
  - Die Menge der stetigen Funktionen
- Wir sind hier nur an der Vektorraumstruktur auf den reellen m-Tupeln interessiert
- Zur Erinnerung: die reellen m-Tupel bezeichnen wir mit

$$\mathbb{R}^m := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} | x_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } 1 \le i \le m \right\} \tag{3}$$

- Wir sprechen $\mathbb{R}^m$ als "R hoch m" aus.
- Die Elemente $x \in \mathbb{R}^m$ nennen wir *reelle Vektoren* oder einfach *Vektoren*

Visualisierung von Vektoren in $\mathbb{R}^2$





Theorem (Reeller Vektorraum)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$ und $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die *Vektoraddition* durch

$$+ : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, (x, y) \mapsto x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{pmatrix} \tag{4}$$

und die *Skalarmultiplikation* durch

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, (a, x) \mapsto ax = a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_m \end{pmatrix} \tag{5}$$

Dann bildet $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$ mit den Rechenregeln der Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ einen Vektorraum, den wir den *reellen Vektorraum* nennen.

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Man sagt, dass Vektoraddition und Skalarmultiplikation *komponentenweise* durchgeführt werden.

Reeller Vektorraum

Beispiele

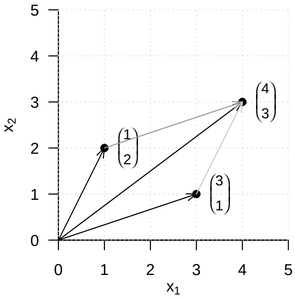
- Für $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $y := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt $x + y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2+1 \\ 3+0 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- Für $x := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $y := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ gilt $x - y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Für $x := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $a := 3$ gilt $ax = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

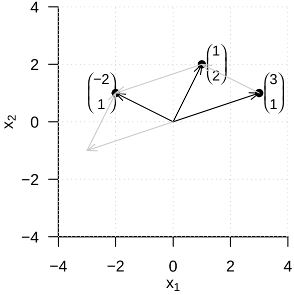
Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{6}$$



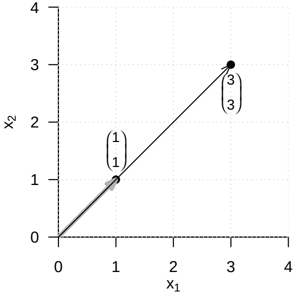
Vektorsubtraktion in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$



Skalarmultiplikation in $\mathbb{R}^2$

$$3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \tag{8}$$



Reeller Vektorraum

Euklidischer Vektorraum

Selbstkontrollfragen

Definition (Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$)

Das *Skalarprodukt auf* $\mathbb{R}^m$ ist definiert als die Abbildung

$$\langle\rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \langle(x,y)\rangle := \langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^m x_i y_i. \tag{9}$$

Bemerkungen

- Das Skalarprodukt heißt Skalarprodukt, weil es einen Skalar ergibt, nicht weil Skalare multipliziert werden.
- Wir sehen später, dass mit der Identifikation $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m\times 1}$ und der Matrixtransposition gilt, dass

$$\langle x,y\rangle = x^T y. \tag{10}$$

Euklidischer Vektorraum

Beispiel

Es seien

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } y := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Dann ergibt sich

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 2 + 0 + 3 = 5. \tag{12}$$

Definition (Euklidischer Vektorraum)

Das Tupel $((\mathbb{R}^m, +, \cdot), \langle\rangle)$ aus dem reellen Vektorraum $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$ und dem Skalarprodukt $\langle\rangle$ auf $\mathbb{R}^m$ heißt *reeller kanonischer Euklidischer Vektorraum*.

Bemerkungen

- Generell heißt jedes Tupel aus einem Vektorraum und einem Skalarprodukt "Euklidischer Vektorraum".
- Informell sprechen wir aber oft auch einfach von $\mathbb{R}^m$ als "Euklidischer Vektorraum" und insbesondere bei $((\mathbb{R}^m, +, \cdot), \langle\rangle)$ von "Euklidischen Vektorraum".
- Ein Euklidischer Vektorraum ist ein Vektorraum mit geometrischer Struktur, die durch das Skalarprodukt induziert wird.
- Insbesondere bekommen im Euklidischen Vektorraum Begriffe wie die *Länge* eines Vektors, der *Abstand* zweier Vektoren und der *Winkel* zwischen zwei Vektoren mithilfe des Skalarproduktes eine Bedeutung.

Euklidischer Vektorraum

Definition (Länge, Abstand, Winkel)

$((\mathbb{R}^m, +, \cdot), \langle\rangle)$ sei der Euklidische Vektorraum.

- Die *Länge* eines Vektors $x \in \mathbb{R}^m$ ist definiert als

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}. \tag{13}$$

- Der *Abstand* zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^m$ ist definiert als

$$d(x, y) := \|x - y\|. \tag{14}$$

- Der *Winkel* α zwischen zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^m$ mit $x, y \neq 0$ ist definiert durch

$$0 \leq \alpha \leq \pi \text{ und } \cos\alpha := \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} \tag{15}$$

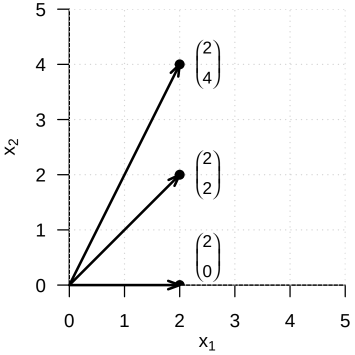
Bemerkungen

- $\|x\|$ heißt auch *Norm von* x oder ℓ_2*-Norm von* x.
- Ohne Beweis halten wir fest, dass für den Abstand gilt, dass

$$d(x, y) \geq 0, d(x, x) = 0, d(x, y) = d(y, x) \text{ und } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y). \tag{16}$$

- $\cos$ ist auf $[0, \pi]$ bijektiv, also invertierbar.

Vektorlängen in $\mathbb{R}^2$



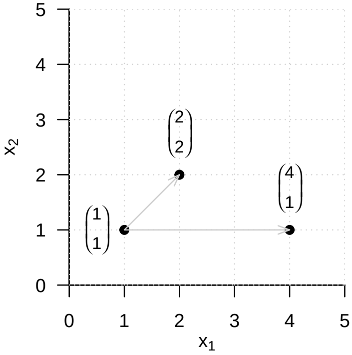
Vektorlängen in $\mathbb{R}^2$

$$\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2.00 \tag{17}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \approx 2.83 \tag{18}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \approx 4.47 \tag{19}$$

Abstände in $\mathbb{R}^2$



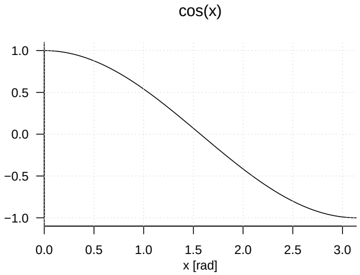
Abstände in $\mathbb{R}^2$

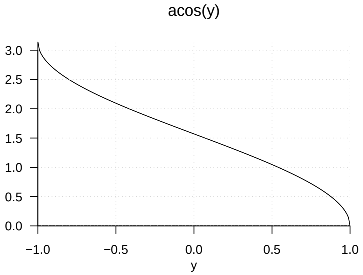
$$d\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right)=\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}\approx 1.41 \tag{20}$$

$$d\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right)=\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{(-3)^2+0^2}=\sqrt{9}=3 \tag{21}$$

Winkel in $\mathbb{R}^2$

Kosinus und Arkuskosinus auf $[0, \pi]$

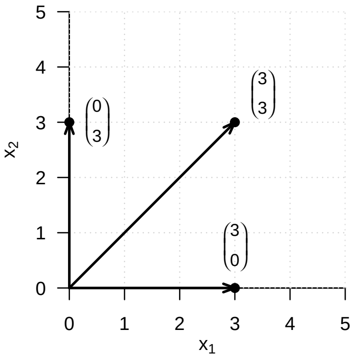




$$\text{deg} = \text{rad} \cdot \frac{180}{\pi}, \ \text{rad} = \text{deg} \cdot \frac{\pi}{180} \tag{22}$$

$$0\pi \ \text{rad} \ = 0.00 \ \text{rad} \ = 0 \ \text{deg} \ , \ \frac{\pi}{2} \ \text{rad} \ \approx 1.57 \ \text{rad} \ = 90 \ \text{deg} \ , \ \pi \ \text{rad} \ \approx 3.14 \ \text{rad} \ = 180 \ \text{deg} \tag{23}$$

Winkel in $\mathbb{R}^2$



Winkel in $\mathbb{R}^2$

Winkel in Radians

$$\alpha = \text{acos}\left(\frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|}\right) = \text{acos}\left(\frac{3 \cdot 3 + 3 \cdot 0}{\sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2}}\right) = \text{acos}\left(\frac{9}{3 \cdot \sqrt{18}}\right) = \frac{\pi}{4} \approx 0.785 \tag{24}$$

Winkel in Grad

$$0.785 \cdot \frac{180°}{\pi} = 45° \tag{25}$$

Winkel in $\mathbb{R}^2$

Winkel in Radians

$$\alpha = \operatorname{acos}\left(\frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\|}\right) = \operatorname{acos}\left(\frac{3 \cdot 0 + 0 \cdot 3}{\sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 3^2}}\right) = \operatorname{acos}\left(\frac{0}{3 \cdot 3}\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57 \tag{26}$$

Winkel in Grad

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 90^\circ \tag{27}$$

Definition (Orthogonalität und Orthonormalität von Vektoren)

$((\mathbb{R}^m, +, \cdot), \langle\rangle)$ sei der Euklidische Vektorraum.

- Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^m$ heißen *orthogonal*, wenn gilt, dass

$$\langle x, y\rangle = 0 \tag{28}$$

- Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^m$ heißen *orthonormal*, wenn gilt, dass

$$\langle x, y\rangle = 0 \text{ und } \|x\| = \|y\| = 1. \tag{29}$$

Bemerkung

- Für orthogonale und orthonormale Vektoren gilt insbesondere auch

$$\cos\alpha = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} = \frac{0}{\|x\|\|y\|} = 0 \tag{30}$$

also

$$\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \tag{31}$$

Reeller Vektorraum

Euklidischer Vektorraum

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie die Definition eines Vektorraums wieder.
2. Geben Sie die Definition des reellen Vektorraums wieder.
3. Geben Sie die Definition des Skalarproduktes auf $\mathbb{R}^m$ wieder.
4. Geben Sie die Definition des Euklidischen Vektorraums wieder.
5. Geben Sie die Definition der Länge eines Vektors im Euklidischen Vektorraum wieder,
6. Geben Sie Definition des Abstands zweier Vektoren im Euklidischen Vektorraum wieder.
7. Geben Sie die Definition des Winkels zwischen zwei Vektoren im Euklidischen Vektorraum wieder.
8. Geben Sie die Definitionen der Orthogonalität und Orthonormalität von Vektoren wieder.

Selbstkontrollfragen - Lösungen

1. Siehe Definition (Vektorraum).
2. Siehe Definition (Reeller Vektorraum)
3. Siehe Definition (Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$)r.
4. Siehe Definition (Euklidischer Vektorraum).
5. Siehe Definition (Länge, Abstand, Winkel).
6. Siehe Definition (Länge, Abstand, Winkel).
7. Siehe Definition (Länge, Abstand, Winkel).
8. Siehe Definition (Orthogonalität und Orthonormalität von Vektoren).