Mathematische Grundlagen

BSc Psychologie | MSc Psychologie

MSc Klinische Psychologie und Psychotherapie

WiSe 2024/25

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(4) Funktionen

Definition und Eigenschaften

Funktionentypen

Elementare Funktionen

Selbstkontrollfragen

Definition und Eigenschaften

Funktionentypen

Elementare Funktionen

Selbstkontrollfragen

Definition (Funktion)

Eine *Funktion* (oder *Abbildung*) f ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element einer Menge D genau ein Element einer Menge Z zuordnet. D wird dabei *Definitionsmenge von* f und Z wird *Zielmenge von* f genannt. Wir schreiben

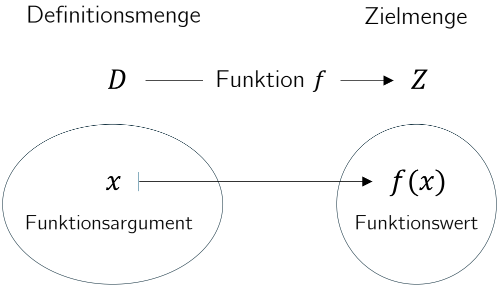
$$f : D \to Z, x \mapsto f(x), \tag{1}$$

wobei $f : D \to Z$ gelesen wird als "die Funktion f bildet alle Elemente der Menge D eindeutig auf Elemente in Z ab" und $x \mapsto f(x)$ gelesen wird als "x, welches ein Element von D ist, wird durch die Funktion f auf $f(x)$ abgebildet, wobei $f(x)$ ein Element von Z ist". Der Pfeil $\to$ steht für die Abbildung zwischen den Mengen D und Z, der Pfeil $\mapsto$ steht für die Abbildung zwischen einem Element von D und einem Element von Z.

Bemerkungen

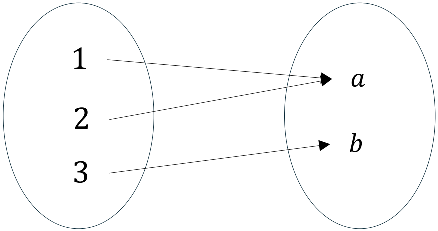
- Es ist zentral, zwischen der *Funktion* f als Zuordnungsvorschrift und einem *Wert* der Funktion $f(x)$ als Element von Z zu unterscheiden. x ist das Argument der Funktion (der "Funktionsinput"), $f(x)$ ist der Wert den f für x annimmt (der "Funktionsoutput").
- Üblicherweise folgt $f(x)$ die Definition der *funktionalen Form* von f, die besagt, wie $f(x)$ aus x zu berechnen ist, zum Beispiel

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto f(x) := x^2. \tag{2}$$

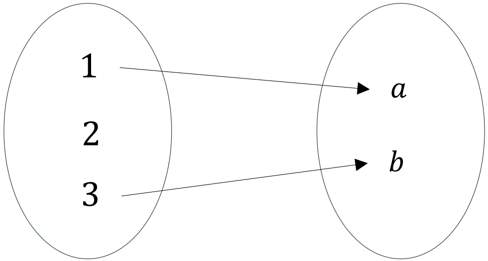

Definitionsmenge
Zielmenge
D
Funktion f
Z
x
$f(x)$
Funktionsargument
Funktionswert

Definition und Eigenschaften

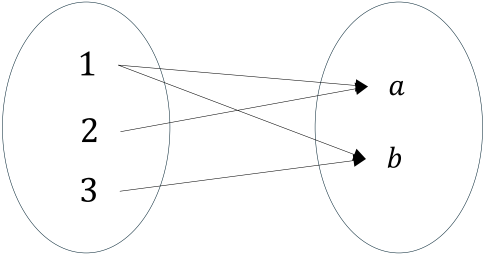
$$f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b\}, x \mapsto \begin{cases} f(1) := a \\ f(2) := a \\ f(3) := b \end{cases}$$



Keine Funktion - Nicht *jedem* $x \in D$ wird genau ein $z \in Z$ zugeordnet



Keine Funktion - Jedem $x \in D$ wird nicht *genau ein* $z \in Z$ zugeordnet



Definition (Bildmenge, Wertebereich, Urbildmenge, Urbild)

Es sei $f : D \to Z, x \mapsto f(x)$ eine Funktion und es seien $D' \subseteq D$ und $Z' \subseteq Z$.

- Die Menge
$$f(D') := \{z \in Z | \text{Es gibt ein } x \in D' \text{ mit } z = f(x)\} \tag{3}$$
heißt die *Bildmenge von* D' und $f(D) \subseteq Z$ heißt der *Wertebereich* von f.
- Die Menge
$$f^{-1}(Z') := \{x \in D | f(x) \in Z'\} \tag{4}$$
heißt die *Urbildmenge von* Z'. $x \in D$ mit $z = f(x) \in Z$ heißt auch *Urbild von* z.

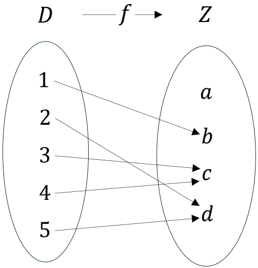
Bemerkung

- Wertebereich $f(D)$ und Zielmenge Z einer Funktion sind nicht notwendigerweise identisch.

Definition und Eigenschaften

Beispiel

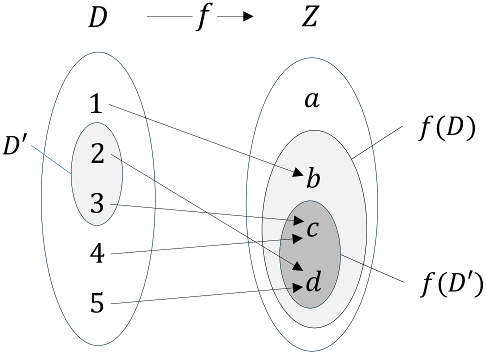
$$f : \{1,2,3,4,5\} \to \{a,b,c,d\}, x \mapsto \begin{cases} f(1) := b \\ f(2) := d \\ f(3) := c \\ f(4) := c \\ f(5) := d \end{cases}$$



Beispiel

Bildmenge: Für $D' := \{2, 3\}$ gilt $f(D') = \{c, d\}$

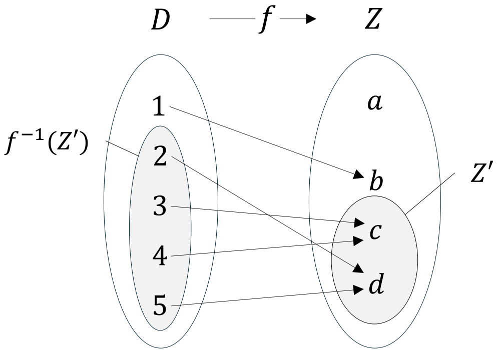
Wertebereich: Es gilt $f(D) = \{b, c, d\}$



Beispiel

Urbildmenge: Für $Z' := \{c, d\}$ gilt $f^{-1}(Z') = \{2, 3, 4, 5\}$

Urbild: $2 \in D$ ist ein Urbild von $d \in Z$.



Definition (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität)

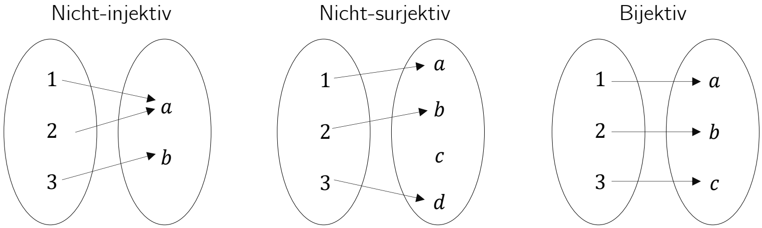
Es sei $f : D \to Z, x \mapsto f(x)$ eine Funktion.

- Die Funktion f heißt *injektiv*, wenn es zu jedem Bild $z \in f(D)$ genau ein Urbild $x \in D$ gibt. Äquivalent gilt, dass f injektiv ist, wenn aus $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ folgt, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$ ist.
- Die Funktion f heißt *surjektiv*, wenn $f(D) = Z$ gilt, wenn also jedes Element der Zielmenge Z ein Urbild in der Definitionsmenge D hat.
- Die Funktion f heißt *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Bemerkungen

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := x^2$ ist nicht injektiv, weil z.B. für $x_1 = 2 \neq -2 = x_2$ gilt, dass $f(x_1) = 2^2 = 4 = (-2)^2 = f(x_2)$. Weiterhin ist f auch nicht surjektiv, weil z.B. $-1 \in \mathbb{R}$ kein Urbild unter f hat.
- $f : [0, \infty[\to [0, \infty[, x \mapsto f(x) := x^2$ ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.
- Bijektive Abbildungen heißen auch *eineindeutige Funktionen* (engl. *one-to-one mappings*).

Definition und Eigenschaften



Definition und Eigenschaften

Funktionentypen

Elementare Funktionen

Selbstkontrollfragen

Definition (Verkettung von Funktionen)

Es seien $f : D \to Z$ und $g : Z \to S$ zwei Funktionen, wobei der Wertebereich von f mit der Definitionsmenge von g übereinstimmen soll. Dann ist durch

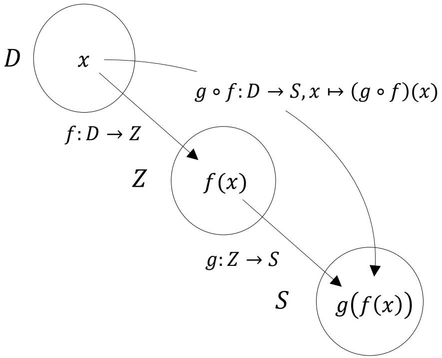
$$g \circ f : D \to S, x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)) \tag{5}$$

eine Funktion definiert, die die *Verkettung von f und g* genannt wird.

Bemerkungen

- $g \circ f$ bezeichnet die Funktion.
- $(g \circ f)(x)$ bezeichnet ein Element in S.
- Erst wird f auf x angewendet, dann wird g auf $f(x)$ angewendet.
- Für $f(x) := -x^2$ und $g(x) := \exp(x)$ ist $(g \circ f)(x) = \exp(-x^2)$.

Verkettung von Funktionen



Definition (Inverse Funktion)

Es sei $f : D \to Z, x \mapsto f(x)$ eine bijektive Funktion. Dann heißt die Funktion f^{-1} mit

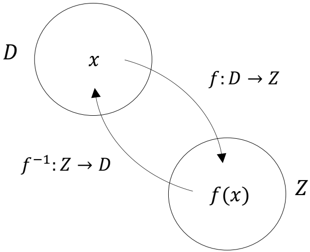
$$f^{-1} \circ f : D \to D, x \mapsto (f^{-1} \circ f)(x) := f^{-1}(f(x)) = x \tag{6}$$

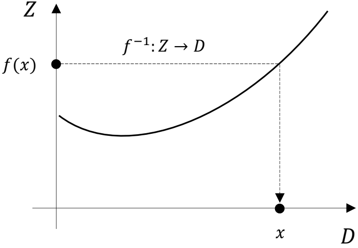
inverse Funktion, *Umkehrfunktion* oder *Inverse* von f.

Bemerkungen

- Weil f bijektiv ist, wird jedem $x \in D$ genau ein $z = f(x) \in Z$ zugeordnet.
- Jedem $z \in Z$ wird also auch genau ein $x \in D$ zugeordnet.
- Die inverse Funktion einer bijektiven Funktion ist also auch bijektiv.
- Die inverse Funktion von $f(x) := 2x =: y$ ist $f^{-1}(y) = y/2$.

Inverse Funktion





Definition (Lineare Abbildung)

Eine Abbildung $f : D \to Z, x \mapsto f(x)$ heißt *lineare Abbildung*, wenn für $x, y \in D$ und einen Skalar c gelten, dass

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ und } f(cx) = cf(x). \tag{7}$$

Eine Abbildung, für die obige Eigenschaften nicht gelten, heißt *nicht-lineare Abbildung*.

Bemerkungen

- Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := ax$ linear, weil

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y) \text{ und } f(cx) = acx = cax = cf(x). \tag{8}$$

- Für $a, b \in \mathbb{R}$ dagegen ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := ax + b$ nicht-linear, weil z.B. für $a := b := 1$ gilt, dass

$$f(x+y) = 1(x+y) + 1 = x + y + 1 \neq x + 1 + y + 1 = f(x) + f(y). \tag{9}$$

- Wir nennen eine Funktion der Form $f(x) := ax + b$ eine *linear-affine Funktion*.

Theorem (Lineare Abbildung der Null)

$f : D \to Z$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$f(0) = 0. \tag{10}$$

Beweis

Mit der Additivität von f gilt

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0). \tag{11}$$

Addition von $-f(0)$ auf beiden Seiten obiger Gleichung ergibt dann

$$f(0) - f(0) = f(0) + f(0) - f(0) \Leftrightarrow 0 = f(0). \tag{12}$$

$\square$

Definition (Funktionenarten)

Wir unterscheiden

- *univariate reellwertige Funktionen* der Form
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x), \tag{13}$$
- *multivariate reellwertige Funktionen* der Form
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = f(x_1, ..., x_n), \tag{14}$$
- *multivariate vektorwertige Funktionen* der Form
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Bemerkung

- In der Physik werden multivariate reellwertige Funktionen auch *Skalarfelder* genannt.
- In der Physik werden multivariate vektorwertige Funktionen auch *Vektorfelder* genannt.
- Es gibt auch *matrixvariate matrixwertige Funktionen* oder *funktionsvariate funktionswertige Funktionen*.

Funktionentypen

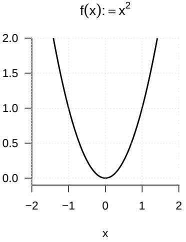
Beispiele

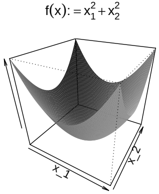
Univariate, reellwertige Funktion

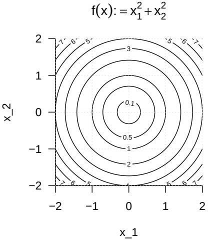
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := x^2 \tag{16}$$

Multivariate (bivariate), reellwertige Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := x_1^2 + x_2^2 \tag{17}$$







Definition und Eigenschaften

Funktionentypen

Elementare Funktionen

Selbstkontrollfragen

Elementare Funktionen

Elementare univariate reellwertige Funktion sind

- die Polynomfunktionen,
- die Exponentialfunktion,
- der Logarithmusfunktion,
- die Gammafunktion.

Wir skizzieren diese Funktionen im Folgenden.

Definition (Polynomfunktionen)

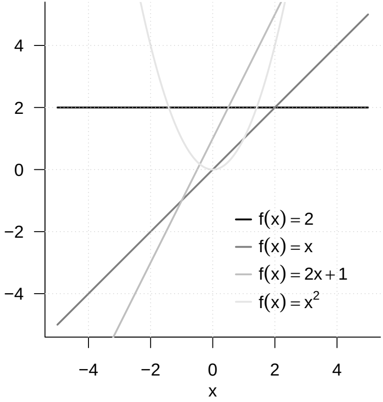
Eine Funktion der Form

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \sum_{i=0}^{k} a_i x^i = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k \tag{18}$$

heißt *Polynomfunktion* k-ten Grades mit Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}$. Typische Polynomfunktionen sind in nachfolgender Tabelle aufgelistet

Name	Funktionale Form	Koeffizienten
Konstante Funktion	$f(x) = a$	$a_0 := a$, $a_i := 0, i > 0$
Identitätsfunktion	$f(x) = x$	$a_0 := 0$, $a_1 := 1$, $a_i := 0, i > 1$
Linear-affine Funktion	$f(x) = ax + b$	$a_0 := b$, $a_1 := a$, $a_i := 0, i > 1$
Quadratfunktion	$f(x) = x^2$	$a_0 := 0$, $a_1 := 0$, $a_2 := 1$, $a_i := 0, i > 2$

Graphen typischer Polynomfunktionen



Theorem (Exponentialfunktion und ihre Eigenschaften)

Die *Exponentialfunktion* ist definiert als

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x) := e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{19}$$

Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:

Wertebereich	$x \in]-\infty, 0[\Rightarrow \exp(x) \in]0,1[$
	$x \in]0,\infty[\quad \Rightarrow \exp(x) \in]1,\infty[$
Monotonie	$x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$
Spezielle Werte	$\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$
Summationseigenschaft	$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
Subtraktionseigenschaft	$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Bemerkungen

- Für Beweise der Eigenschaften wird auf die weiterführende Literatur verwiesen.
- $e \approx 2.71$ heißt *Eulersche Zahl*.
- Mit der Additionsseigenschaft und den speziellen Werten gilt $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$.

Theorem (Logarithmusfunktion und ihre Eigenschaften)

Die *Logarithmusfunktion* ist definiert als inverse Funktion der Exponentialfunktion,

$$\ln :]0,\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x) \text{ mit } \ln(\exp(x)) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

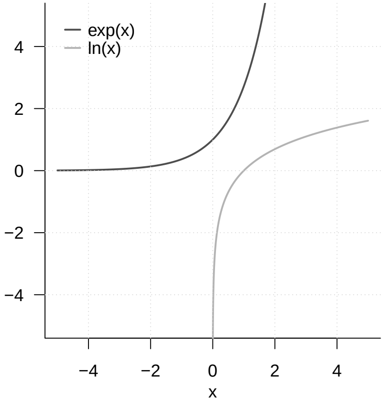
Die Logarithmusfunktion hat folgende Eigenschaften:

Wertebereich	$x \in]0,1[\;\Rightarrow \ln(x) \in]-\infty, 0[$
	$x \in]1,\infty[\Rightarrow \ln(x) \in]0,\infty[$
Monotonie	$x < y \Rightarrow \ln(x) < \ln(y)$
Spezielle Werte	$\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1.$
Produkteigenschaft	$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
Potenzeigenschaft	$\ln(x^c) = c\ln(x)$
Divisionseigenschaft	$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

Bemerkungen

- Für Beweise der Eigenschaften wird auf die weiterführende Literatur verwiesen.
- "Die Logarithmusfunktion wandelt Produkte in Summen und Potenzen in Produkte um."

Graphen der Exponential- und Logarithmusfunktion



Theorem (Gammafunktion und ihre Eigenschaften)

Die *Gammafunktion* ist definiert durch

$$\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \Gamma(x) := \int_0^\infty \xi^{x-1} \exp(-\xi)\, d\xi \tag{21}$$

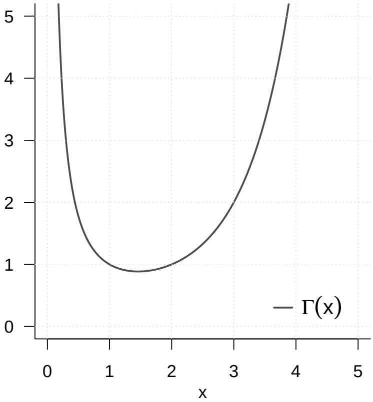
Die Gammafunktion hat folgende Eigenschaften:

Spezielle Werte	$\Gamma(1) = 1$
	$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
	$\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$.
Rekursionseigenschaft	Für $x > 0$ gilt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Bemerkungen

- Für Beweise der Eigenschaften wird auf die weiterführende Literatur verwiesen.

Graph der Gammafunktion auf $]0, 5[$



Definition und Eigenschaften

Funktionentypen

Elementare Funktionen

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie die Definition einer Funktion wieder.
2. Geben Sie die Definition der Begriffe Bildmenge, Wertebereich, Urbildmenge und Urbild wieder.
3. Geben Sie die Definitionen der Begriffe Surjektivität, Injektivität, und Bijektivität wieder.
4. Erläutern Sie, warum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := x^2$ weder injektiv noch surjektiv ist.
5. Erläutern Sie, warum $f : [0, \infty[\to [0, \infty[, x \mapsto f(x) := x^2$ bijektiv ist.
6. Geben Sie die Definition der Verkettung von Funktionen wieder.
7. Geben Sie die Definition des Begriffs der inversen Funktion wieder.
8. Geben Sie die inverse Funktion von $f : [0, \infty[\to [0, \infty[, x \mapsto f(x) := x^2$ an.
9. Geben Sie die Definition des Begriffs der linearen Abbildung wieder.
10. Geben Sie die Definitionen der Begriffe der univariat-reellwertigen, multivariat-reellwertigen und multivariat-vektorwertigen Funktion wieder.
11. Geben Sie die Summations- und Subtraktionseigenschaften der Exponentialfunktion an.
12. Geben Sie die Produkt-, Potenz- und Divisionseigenschaften der Logarithmusfunktion an.
13. Skizzieren Sie die Identitätsfunktion und die konstante Funktion für $a := 1$.
14. Skizzieren Sie die lineare Funktion $f(x) = ax + b$ für $a = 2$ und $b = 3$.
15. Skizzieren Sie die Funktionen $f(x) := (x - 1)^2$ und $g(x) := (x + 3)^2$.
16. Skizzieren Sie die Exponential- und Logarithmusfunktionen.

Selbstkontrollfragen - Lösungen

1. Siehe Definition (Funktion).
2. Siehe Definition (Bildmenge, Wertebereich, Urbildmenge, Urbild).
3. Siehe Definition (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität).
4. Die Funktion ist nicht injektiv, weil es zum Beispiel zu $4 \in f(D)$ mehr als ein Urbild gibt, nämlich $-2 \in D$ und $2 \in D$. Die Funktion ist nicht surjektiv, weil alle $z \in Z$ mit $z < 0$ keine Urbilder in D haben.
5. Die Funktion ist bijektiv, weil sie injektiv und surjektiv ist. Sie ist injektiv, weil jedes $z \in Z$ genau ein Urbild in D hat, nämlich $\sqrt{z} \in D$. Sie ist surjektiv, weil jedes $z \in Z$ ein Urbild in D hat, nämlich $\sqrt{z} \in D$.
6. Siehe Definition (Verkettung von Funktionen).
7. Siehe Definition (Inverse Funktion).
8. Die inverse Funktion von f ist $f^{-1} : [0, \infty[\to [0, \infty[, z \mapsto f^{-1}(z) := \sqrt{z}$, denn es gilt
$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x \text{ für alle } x \in [0, \infty[. \tag{22}$$
9. Siehe Definition (Lineare Abbildung).
10. Siehe Definition (Funktionenarten).
11. Es gelten
$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y) \text{ und } \exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}. \tag{23}$$
12. Es gelten
$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \ln\left(x^c\right) = c \ln x \text{ und } \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x). \tag{24}$$