Mathematische Grundlagen

BSc Psychologie | MSc Psychologie

MSc Klinische Psychologie und Psychotherapie

WiSe 2024/25

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(2) Mengen

Grundlegende Definitionen

Verknüpfungen

Spezielle Mengen

Selbstkontrollfragen

Definition (Mengen und Mengendefinition)

Nach Cantor (1895) ist eine *Menge* definiert als "eine Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsere Anschauung oder unseres Denken (welche die Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen". Wir schreiben

$$m \in M \text{ bzw. } m \notin M \tag{1}$$

um auszudrücken, dass m ein Element bzw. kein Element von M ist. Zur Definition von Mengen gibt es mindestens folgende Möglichkeiten:

(1) Auflisten der Elemente in geschweiften Klammern, z.B. $M := \{1, 2, 3\}$

(2) Angabe der Eigenschaften der Elemente, z.B. $M := \{x \in \mathbb{N} | x < 4\}$

(3) Gleichsetzen mit einer anderen eindeutig definierten Menge, z.B. $M := \mathbb{N}_3$

Bemerkungen

- $\{x \in \mathbb{N} | x < 4\}$ wird als "$x \in \mathbb{N}$, für die gilt, dass $x < 4$ ist" gelesen.
- Die Bedeutung von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_3$ wird im Folgenden erläutert.
- Mengen sind *ungeordnet*, d.h. es gilt zum Beispiel $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{2, 3, 1\}$.

© 2025 Dirk Ostwald CC BY 4.0

Definition (Teilmengen und Mengengleichheit)

- Eine Menge M heißt *Teilmenge* einer Menge N, wenn für jedes Element $m \in M$ gilt, dass auch $m \in N$. Ist M eine Teilmenge von N, so schreibt man

$$M \subseteq N \tag{2}$$

  und nennt M *Untermenge* von N und N *Obermenge* von M.

- Eine Menge M heißt *echte Teilmenge* einer Menge N, wenn für jedes Element $m \in M$ gilt, dass auch $m \in N$, es aber zumindest ein Element $n \in N$ gibt, für das gilt $n \notin M$. Ist M eine echte Teilmenge von N, so schreibt man

$$M \subset N. \tag{3}$$

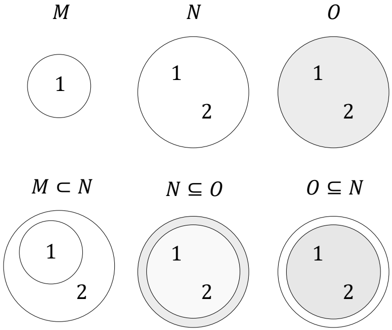
- Zwei Mengen M und N heißen *gleich*, wenn für jedes Element $m \in M$ gilt, dass auch $m \in N$, und wenn für jedes Element $n \in N$ gilt, dass auch $n \in M$. Sind die Mengen M und N gleich, so schreibt man

$$M = N. \tag{4}$$

© 2025 Dirk Ostwald CC BY 4.0

Beispiel

Es seien $M := \{1\}$, $N := \{1,2\}$, $O := \{1,2\}$. Dann gelten $M \subset N, N \subseteq O, O \subseteq N$ und $N = O$.



Definition (Kardinalität)

Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt *Kardinalität* und wird mit $|M|$ bezeichnet.

Beispiele

- Für $M := \{1, 2, 3\}$ gilt $|M| = 3$.
- Für $M := \{a, b\}$ gilt $|M| = 2$.
- Für $M := \{x, y, z, \pi\}$ gilt $|M| = 4$.

Definition (Leere Menge)

Eine Menge mit Kardinalität Null heißt *leere Menge* und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

- Für $M := \emptyset$ gilt $|M| = 0$.

Definition (Potenzmenge)

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M heißt *Potenzmenge von* M. Die Potenzmenge einer Menge M wird mit $\mathcal{P}(M)$ bezeichnet.

Bemerkungen

- Man beachte, dass die leere Untermenge von M und M selbst immer Elemente von $\mathcal{P}(M)$ sind.

Wir betrachten vier Beispiele zum Begriff der Potenzmenge.

- $M_0 := \emptyset$ sei die leere Menge. Dann gilt

$$\mathcal{P}(M_0) = \{\emptyset\}. \tag{5}$$

- M_1 sei die einelementige Menge $M_1 := \{a\}$. Dann gilt

$$\mathcal{P}(M_1) = \{\emptyset, \{a\}\}. \tag{6}$$

- Es sei $M_2 := \{a, b\}$. Dann hat M_2 sowohl ein- als auch zweielementige Teilmengen und es gilt

$$\mathcal{P}(M_2) = \{\emptyset, \{a\}\,\{b\}, \{a, b\}\}. \tag{7}$$

- Es sei $M_3 := \{a, b, c\}$. Dann hat M ein-, zwei-, als auch dreielementige Teilmengen und es gilt

$$\mathcal{P}(M_3) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}. \tag{8}$$

Theorem (Kardinalität der Potenzmenge)

Gegeben sei eine Menge M mit Kardinalität $|M| = n$ und $\mathcal{P}(M)$ sei ihre Potenzmenge. Dann gilt

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^n \tag{9}$$

Beweis

Um die Aussage des Theorems zu beweisen assoziieren wir jedes Element P der Potenzmenge von M eindeutig mit einer binären Folge der Länge n, wobei der Eintrag an der $i$ten Stelle repräsentiert, ob das $i$te Element von M ein Element von P ist oder nicht. Seien beispielsweise $M := \{m_1, m_2, m_3\}$ und $P := \{m_2, m_3\}$. Dann entspricht P die binäre Folge 011. Der leeren Menge $P := \emptyset$ entspricht die binäre Folge 000 und der Ausgangsmenge $P = M$ entspricht die binäre Folge 111. Es ergibt sich also die Frage, wieviele eindeutige binäre Folgen der Länge n es gibt. Da es für jedes Element der Folge zwei mögliche Zustände gibt, ergeben sich n Faktoren $2 \cdot 2 \cdots 2$, also 2^n. □

In den obigen Beispielen haben wir die Fälle

- $|M_0| = 0 \Rightarrow |\mathcal{P}(M_0)| = 2^0 = 1$
- $|M_1| = 1 \Rightarrow |\mathcal{P}(M_1)| = 2^1 = 2$
- $|M_2| = 2 \Rightarrow |\mathcal{P}(M_2)| = 2^2 = 4$
- $|M_3| = 3 \Rightarrow |\mathcal{P}(M_3)| = 2^3 = 8$

Grundlegende Definitionen

Verknüpfungen

Spezielle Mengen

Selbstkontrollfragen

Definition (Mengenoperationen)

M und N seien zwei Mengen.

- Die *Vereinigung von M und N* ist definiert als die Menge

$$M \cup N := \{x | x \in M \vee x \in N\}, \tag{10}$$

- Der *Durchschnitt von M und N* ist definiert als die Menge

$$M \cap N := \{x | x \in M \wedge x \in N\}. \tag{11}$$

  Gilt für zwei Mengen, dass $M \cap N = \emptyset$, dann heißen M und N *disjunkt*.

- Die *Differenz von M und N* ist definiert als die Menge

$$M \setminus N := \{x | x \in M \wedge x \notin N\}. \tag{12}$$

- Die *symmetrische Differenz von M und N* ist definiert als die Menge

$$M \Delta N := \{x | (x \in M \vee x \in N) \wedge x \notin M \cap N\}. \tag{13}$$

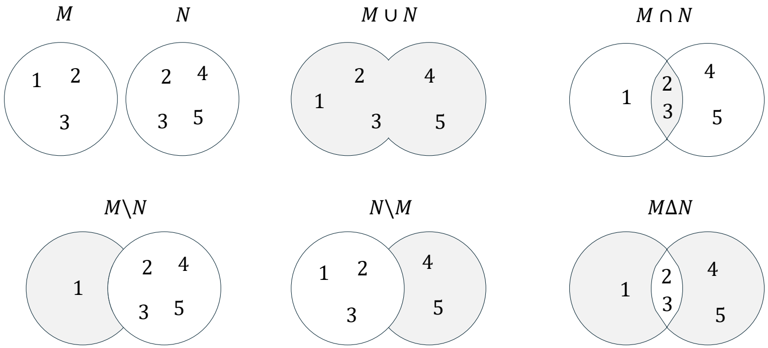
© 2025 Dirk Ostwald CC BY 4.0

Beispiel

Für $M := \{1,2,3\}$ und $N := \{2,3,4,5\}$ gelten

- $M \cup N = \{1,2,3,4,5\}$
- $M \cap N = \{2,3\}$
- $M \setminus N = \{1\}$
- $N \setminus M = \{4,5\}$
- $M \Delta N = \{1,4,5\}$

Beispiel



Definition (Partition)

M sei eine Menge und $P := \{N_i\}$ sei eine Menge von Mengen N_i mit $i = 1, ..., n$, so dass gilt

$$(M = \cup_{i=1}^n N_i) \wedge \left(N_i \cap N_j = \emptyset \text{ für } i = 1, ..., n, j = 1, ..., n, i \neq j\right). \quad (14)$$

Dann heißt P eine *Partition* (oder *Zerlegung*) von M.

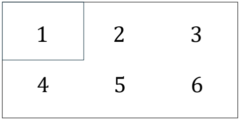
Bemerkung

- $\cup_{i=1}^n N_i$ bezeichnet die Vereinigung von n Mengen $N_1, ..., N_n$, also $N_1 \cup N_2 \cup \cdots \cup N_n$.
- Partitionen sind Mengen disjunkter Teilmengen einer Menge.
- Partitionen sind in der Regel nicht eindeutig, d.h. es gibt mehr als eine Partition einer Menge.

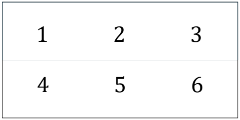
© 2025 Dirk Ostwald CC BY 4.0

Beispielpartitionen von $M := \{1,2,3,4,5,6\}$

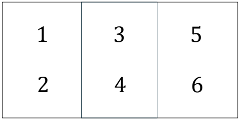
$P_1 \coloneqq \{\{1\},\{2,3,4,5,6\}\}$



$P_2 \coloneqq \{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$



$P_3 \coloneqq \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$



Spezielle Mengen

Definition (Zahlenmengen)

Es bezeichnen

- $\mathbb{N} \;\; := \{1, 2, 3, ...\}$ die *natürlichen Zahlen*,
- $\mathbb{N}_n := \{1, 2, 3, ..., n\}$ die *natürlichen Zahlen der Ordnung* n,
- $\mathbb{N}^0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ die *natürlichen Zahlen* und Null,
- $\mathbb{Z} \;\; := \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ die *ganzen Zahlen*,
- $\mathbb{Q} \;\; := \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ die *rationalen Zahlen*,
- $\mathbb{R}$ die *reellen Zahlen*, und
- $\mathbb{C} \;\; := \{a + ib | a, b \in \mathbb{R}, i := \sqrt{-1}\}$ die *komplexen Zahlen*.

Bemerkungen

- $\mathbb{R}$ umfasst die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ wie z.B. e, π und $\sqrt{2}$.
- Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Definition (Intervalle)

Zusammenhängende Teilmengen der reellen Zahlen heißen *Intervalle*. Für $a, b \in \mathbb{R}$ unterscheidet man

- das *abgeschlossene Intervall*
$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, \tag{15}$$
- das *offene Interval*
$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}, \tag{16}$$
- die *halboffenen Intervalle*
$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\} \text{ und } [a, b[:= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}. \tag{17}$$

Bemerkungen

- Positiv Unendlich (∞) und negativ Unendlich ($-\infty$) sind keine Elemente von $\mathbb{R}$.
- Es gilt also immer $]-\infty, b]$ oder $]-\infty, b[$ bzw. $]a, \infty[$ oder $[a, \infty[$, sowie $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$.

Spezielle Mengen

Beispiele

$[1,2] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} | 1 \le x \le 2\}$

$[1,2[\coloneqq \{x \in \mathbb{R} | 1 \le x < 2\}$

$]1,2] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \le 2\}$

$]1,2[\coloneqq \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 2\}$

Der schwarze Punkt signalisiert, dass die entsprechende Zahl Teil des Intervalls ist.

Definition (Kartesische Produkte)

M und N seien zwei Mengen. Dann ist das *Kartesische Produkt der Mengen M und N* die Menge aller geordneten Tupel (m,n) mit $m \in M$ und $n \in N$, formal

$$M \times N := \{(m,n) | m \in M, n \in N\}. \tag{18}$$

Das Kartesische Produkt einer Menge M mit sich selbst wird bezeichnet mit

$$M^2 := M \times M. \tag{19}$$

Seien weiterhin $M_1, ..., M_n$ Mengen. Dann ist das *Kartesische Produkt der Mengen $M_1, ..., M_n$* die Menge aller geordneten n-Tupel $(m_1, ..., m_n)$ mit $m_i \in M_i$ für $i = 1, ..., n$, formal

$$\prod_{i=1}^n M_i := M_1 \times \cdots \times M_n := \{(m_1, ..., m_n) | m_i \in M_i \text{ für } i = 1, ..., n\}. \tag{20}$$

Das n-fache Kartesische Produkt einer Menge M mit sich selbst wird bezeichnet mit

$$M^n := \prod_{i=1}^n M := \{(m_1, ..., m_n) | m_i \in M\}. \tag{21}$$

Bemerkungen

- Mengen sind ungeordnet, Zahlentupel sind geordnet.
- Es gilt also zum Beispiel $\{1,2\} = \{2,1\}$, aber $(1,2) \neq (2,1)$.

Beispiel

Es seien $M := \{1, 2\}$ und $N := \{1, 2, 3\}$. Dann sind

$$M \times N := \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\} \tag{22}$$

(m, n)	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$m = 1$	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$
$m = 2$	$(2, 1)$	$(2, 2)$	$(2, 3)$

und

$$N \times M := \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\} \tag{23}$$

(n, m)	$m = 1$	$m = 2$
$n = 1$	$(1, 1)$	$(1, 2)$
$n = 2$	$(2, 1)$	$(2, 2)$
$n = 3$	$(3, 1)$	$(3, 2)$

$\Rightarrow M \times N \neq N \times M$

$\Rightarrow$ Das Kartesische Produkt ist im Allgemeinen nicht kommutativ

Definition (Die Menge $\mathbb{R}^n$)

Das n-fache Kartesische Produkt der reellen Zahlen mit sich selbst wird bezeichnet mit

$$\mathbb{R}^n := \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R} := \{x := (x_1, ..., x_n) | x_i \in \mathbb{R}\} \tag{24}$$

und "$\mathbb{R}$ *hoch* n" gesprochen. Wir schreiben die Elemente von $\mathbb{R}^n$ typischerweise als Spalten

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{25}$$

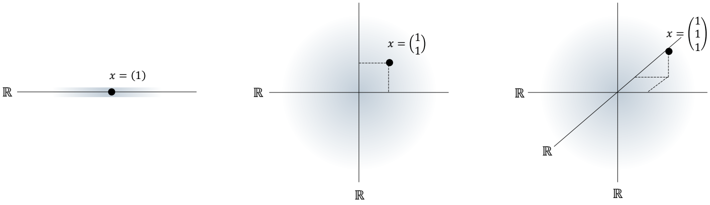
und nennen sie n-*dimensionale Vektoren*. Die Elemente von $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ heißen nennt man *Skalare*.

Bemerkungen

- Ein Beispiel für $x \in \mathbb{R}^4$ ist $x = \begin{pmatrix} 0.16 \\ 1.76 \\ 0.23 \\ 7.10 \end{pmatrix}$.

Beispiele

$$\mathbb{R}^1 := \{(x_1) | x_1 \in \mathbb{R}\} \qquad \mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \qquad \mathbb{R}^3 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$



Grundlegende Definitionen

Verknüpfungen

Spezielle Mengen

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie die Definition einer Menge nach Cantor (1895) wieder.
2. Nennen Sie drei Möglichkeiten zur Definition einer Menge.
3. Erläutern Sie die Ausdrücke $m \in M$ und $m \notin M$,
4. Erläutern Sie die Ausdrücke $M \subseteq N, M \subset N$ für zwei Mengen M und N.
5. Geben Sie die Definition der Kardinalität einer Menge wieder.
6. Geben Sie die Definition der Potenzmenge einer Menge wieder.
7. Es sei $M := \{1, 2\}$. Bestimmen Sie $\mathcal{P}(M)$.
8. Es seien $M := \{1, 2\}, N := \{1, 4, 5\}$. Bestimmen Sie $M \cup N, M \cap N, M \setminus N, M \Delta N$.
9. Erläutern Sie die Symbole $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_n$, und $\mathbb{N}^0$.
10. Erläutern Sie die Unterschiede zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ und zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$.
11. Geben Sie die Definition abgeschlossener, offener, und halboffener Intervalle wieder.
12. Es seien M und N Mengen. Erläutern Sie die Notation $M \times N$.
13. Geben Sie die Definition von $\mathbb{R}^n$ wieder.

© 2025 Dirk Ostwald CC BY 4.0

Selbstkontrollfragen

1. Siehe Definition (Mengen und Mengendefinition).
2. Siehe Definition (Mengen und Mengendefinition).
3. Siehe Definition (Mengen und Mengendefinition).
4. Siehe Definition (Teilmengen und Mengengleichheit).
5. Siehe Definition (Kardinalität).
6. Siehe Definition (Potenzmenge).
7. Es gilt $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
8. Es gelten $M \cup N = \{1, 2, 4, 5\}$, $M \cap N = \{1\}$, $M \setminus N = \{2\}$, $M \Delta N = \{2, 4, 5\}$
9. $\mathbb{N}$ bezeichnet die natürlichen Zahlen, also $1, 2, ...$ $\mathbb{N}_n$ bezeichnet die natürlichen Zahlen bis und inklusive n, also $1, 2, ..., n$. $\mathbb{N}^0$ bezeichnet die natürlichen Zahlen und Null, also $0, 1, 2....$
10. $\mathbb{Z}$ enthält die negativen natürlichen Zahlen und die Null, $\mathbb{N}$ nicht. $\mathbb{R}$ enthält neben den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ auch diejenigen Zahlen, die sich nicht als rationale Zahl darstellen lassen, wie zum Beispiel die Kreiszahl π.
11. Siehe Definition (Intervalle).
12. Siehe Definition (Kartesische Produkte).
13. Siehe Definition (Die Menge $\mathbb{R}^n$).

© 2025 Dirk Ostwald CC BY 4.0