# Testtheorie und Testkonstruktion

MSc Klinische Psychologie und Psychotherapie

SoSe 2024

Prof. Dr. Dirk Ostwald

# (4) Lokale Unkorreliertheit und Parallelität

Lokale Unkorreliertheit

Parallelität

Selbstkontrollfragen

**Lokale Unkorreliertheit**

Parallelität

Selbstkontrollfragen

# Lokale Unkorreliertheit

Bisher haben wir mit

$$\mathbb{E}(\varepsilon|\tau = t) = 0, \quad \mathbb{E}(\varepsilon) = 0, \quad \mathbb{C}(\tau, \varepsilon) = 0, \quad \mathbb{V}(\upsilon) = \mathbb{V}(\tau) + \mathbb{V}(\varepsilon) \text{ und } \mathbb{C}(\upsilon, \tau) = \mathbb{V}(\tau) \tag{1}$$

eine Reihe von Eigenschaften des Modells multipler Testmessungen kennengelernt, die (im Sinne des einfachen Modells multipler Testmessungen) für die True-, Observed-, und Error-Scores $\tau, \upsilon$ und $\varepsilon$ einer (und damit jeder) Person $i$ und einer Testmessung $j$ gelten.

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit Eigenschaften des Modells multipler Testmessungen, die für die True-, Observed-, und Error-Scores $\tau_j, \upsilon_j, \varepsilon_j$ und $\tau_k, \upsilon_k, \varepsilon_k$ einer (und damit jeder) Person $i$ hinsichtlich zweier Testmessungen $j$ und $k$ gelten.

Wir fassen diese Eigenschaften des Modells multipler Testmessungen im Theorem zur *Lokalen Unkorreliertheit* des Modells multipler Testmessungen zusammen.

# Lokale Unkorreliertheit

## Theorem (Lokale Unkorreliertheit)

Gegeben sei das Modell multipler Testmessungen. Dann gelten für alle Personen $i = 1, ..., n$ und alle Testmessungen $j$ und $k$ mit $1 \le j, k \le m$ und $j \ne k$, dass

(1) $\mathbb{C}(\upsilon_{ij}, \upsilon_{ik} | \tau_{ij} = t_{ij}, \tau_{ik} = t_{ik}) = 0$,

(2) $\mathbb{C}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ik} | \tau_{ij} = t_{ij}, \tau_{ik} = t_{ik}) = 0$,

(3) $\mathbb{C}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ik}) = 0$,

(4) $\mathbb{C}(\tau_{ij}, \varepsilon_{ik}) = 0$ und

(5) $\mathbb{C}(\upsilon_{ij}, \upsilon_{ik}) = \mathbb{C}(\tau_{ij}, \tau_{ik})$.

Bemerkungen

- Aussage (1) bezieht sich auf die bedingte gemeinsame Verteilung von $\upsilon_{ij}$ und $\upsilon_{ik}$.
- Aussage (2) bezieht sich auf die bedingte gemeinsame Verteilung von $\varepsilon_{ij}$ und $\varepsilon_{ik}$.
- Aussagen (3) bis (5) beziehen sich auf die jeweiligen Marginalverteilungen.
- Im Sinne des einfachen Modells der Klassischen Testtheorie werden obige Eigenschaften oft auch als

$$\mathbb{C}(\upsilon_j, \upsilon_k | \tau_j = t_j, \tau_k = t_k) = 0, \quad \mathbb{C}(\varepsilon_j, \varepsilon_k | \tau_j = t_j, \tau_k = t_k) = 0, \tag{2}$$

$$\mathbb{C}(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = 0, \quad \mathbb{C}(\tau_j, \varepsilon_k) = 0, \quad \mathbb{C}(\upsilon_j, \upsilon_k) = \mathbb{C}(\tau_j, \tau_k) \tag{3}$$

geschrieben.

Beweis

Zur Vereinfachung der Notation verzichten wir in den Beweisen auf das $i$ Subskript. Wir betrachten weiterhin nur den diskreten Fall und setzen die Existenz der marginalen Wahrscheinlichkeitsmassefunktion

$$p(t_j, y_j, t_k, y_k) = p(t_j, t_k)p(y_j|t_j)p(y_k|t_k) \tag{4}$$

und folglich auch der bedingten Wahrscheinlichkeitsmassefunktion

$$p(y_j, y_k|t_j, t_k) = \frac{p(t_j, y_j, t_k, y_k)}{p(t_j, t_k)} = \frac{p(t_j, t_k)p(y_j|t_j)p(y_k|t_k)}{p(t_j, t_k)} = p(y_j|t_j)p(y_k|t_k) \tag{5}$$

voraus. Der kontinuierliche Fall folgt dann wieder analog.

# Lokale Unkorreliertheit

Beweis (fortgeführt)

(1) Es gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}(\upsilon_j, \upsilon_k | \tau_j = t_j, \tau_k = t_k) &= \sum_{y_j \in \mathcal{Y}_j} \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} (y_j - \mathbb{E}(\upsilon_j | \tau_j = t_j))(y_k - \mathbb{E}(\upsilon_k | \tau_k = t_k)) p(y_j | t_j) p(y_k | t_k) \\
&= \sum_{y_j \in \mathcal{Y}_j} (y_j - t_j) p(y_j | t_j) \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} (y_k - t_k) p(y_k | t_k) \\
&= \sum_{y_j \in \mathcal{Y}_j} (y_j - t_j) p(y_j | t_j) \left( \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} y_k p(y_k | t_k) - t_k \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} p(y_k | t_k) \right) \\
&= \sum_{y_j \in \mathcal{Y}_j} (y_j - t_j) p(y_j | t_j) \, (t_k - t_k \cdot 1) \\
&= \sum_{y_j \in \mathcal{Y}_j} (y_j - t_j) p(y_j | t_j) \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Beweis (fortgeführt)

(2) Wir bestimmen zunächst $\mathbb{E}(\varepsilon_j\varepsilon_k|\tau_j = t_j, \tau_k = t_k)$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varepsilon_j\varepsilon_k|\tau_j = t_j, \tau_k = t_k) &= \mathbb{E}((\upsilon_j - \tau_j)(\upsilon_k - \tau_k)|\tau_j = t_j, \tau_k = t_k) \\
&= \sum_{y_j \in \mathcal{Y}_j} \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} (y_j - t_j)(y_k - t_k) p(y_j|t_j) p(y_k|t_k) \\
&= \sum_{y_j \in \mathcal{Y}_j} (y_j - t_j) p(y_j|t_j) \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} (y_k - t_k) p(y_k|t_k) \\
&= \sum_{y_j \in \mathcal{Y}_j} (y_j - t_j) p(y_j|t_j) \left( \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} y_k p(y_k|t_k) - t_k \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} p(y_k|t_k) \right) \\
&= \sum_{y_j \in \mathcal{Y}_j} (y_j - t_j) p(y_j|t_j) \, (t_k - t_k \cdot 1) \\
&= \sum_{y_j \in \mathcal{Y}_j} (y_j - t_j) p(y_j|t_j) \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Mit dem Verschiebungssatz der bedingten Kovarianz und Aussage (1) des Theorems zu den Ersten Eigenschaften des Modells multipler Messungen folgt dann

$$
\mathbb{C}(\varepsilon_j, \varepsilon_k|\tau_j = t_j, \tau_k = t_k) = \mathbb{E}(\varepsilon_j\varepsilon_k|\tau_j = t_j, \tau_k = t_k) - \mathbb{E}(\varepsilon_j|\tau_j = t_j)\mathbb{E}(\varepsilon_k|\tau_k = t_k) = 0 - 0 \cdot 0 = 0. \tag{8}
$$

# Lokale Unkorreliertheit

Beweis (fortgeführt)

(3) Wir bestimmen zunächst $\mathbb{E}(\varepsilon_j\varepsilon_k)$. Mit dem Beweis von Aussage (2) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varepsilon_j\varepsilon_k) &= \mathbb{E}((\upsilon_j-\tau_j)(\upsilon_k-\tau_k)) \\
&= \sum_{t_j\in\mathcal{T}_j}\sum_{t_k\in\mathcal{T}_k}\sum_{y_j\in\mathcal{Y}_j}\sum_{y_k\in\mathcal{Y}_k}(y_j-t_j)(y_k-t_k)p(y_j|t_j)p(y_k|t_k)p(t_j,t_k) \\
&= \sum_{t_j\in\mathcal{T}_j}\sum_{t_k\in\mathcal{T}_k}\sum_{y_j\in\mathcal{Y}_j}\sum_{y_k\in\mathcal{Y}_k}(y_j-\mathbb{E}(\upsilon_j|\tau_j=t_j))(y_k-\mathbb{E}(\upsilon_k|\tau_k=t_k))p(y_j|t_j)p(y_k|t_k)p(t_j,t_k) \\
&= \sum_{t_j\in\mathcal{T}_j}\sum_{t_k\in\mathcal{T}_k}\mathbb{E}\left((\upsilon_j-\tau_j)(\upsilon_k-\tau_k)|\tau_j=t_j,\tau_j=t_j\right)p(t_j,t_k) \\
&= \sum_{t_j\in\mathcal{T}_j}\sum_{t_k\in\mathcal{T}_k}\mathbb{E}\left(\varepsilon_j\varepsilon_k|\tau_j=t_j,\tau_j=t_j\right)p(t_j,t_k) \\
&= \sum_{t_j\in\mathcal{T}_j}\sum_{t_k\in\mathcal{T}_k}0\cdot p(t_j,t_k) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{9}
$$

Mit dem Kovarianzverschiebungssatz und Aussage (2) des Theorems zu den Ersten Eigenschaften des Modells multipler Testmessungen ergibt sich dann

$$
\mathbb{C}(\varepsilon_j,\varepsilon_k) = \mathbb{E}(\varepsilon_j\varepsilon_k) - \mathbb{E}(\varepsilon_j)\mathbb{E}(\varepsilon_k) = 0 - 0\cdot 0 = 0. \tag{10}
$$

# Lokale Unkorreliertheit

Beweis (fortgeführt)

(4) Mit dem Kovarianzverschiebungssatz und Aussage (2) des Theorems zu den Ersten Eigenschaften des Modells multipler Testmessungen gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}(\tau_j, \varepsilon_k) &= \mathbb{E}(\tau_j \varepsilon_k) - \mathbb{E}(\tau_j)\mathbb{E}(\varepsilon_k) \\
&= \mathbb{E}(\tau_j \varepsilon_k) - \mathbb{E}(\tau_j) \cdot 0 \\
&= \mathbb{E}(\tau_j (\upsilon_k - \tau_k)) \\
&= \sum_{t_j \in \mathcal{T}_j} \sum_{t_k \in \mathcal{T}_k} \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} t_j (y_k - t_k) p(y_k | t_k) p(t_j, t_k) \\
&= \sum_{t_j \in \mathcal{T}_j} t_j \sum_{t_k \in \mathcal{T}_k} p(t_j, t_k) \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} (y_k - t_k) p(y_k | t_k) \\
&= \sum_{t_j \in \mathcal{T}_j} t_j \sum_{t_k \in \mathcal{T}_k} p(t_j, t_k) \left( \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} y_k p(y_k | t_k) - t_k \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} p(y_k | t_k) \right) \\
&= \sum_{t_j \in \mathcal{T}_j} t_j \sum_{t_k \in \mathcal{T}_k} p(t_j, t_k) \, (t_k - t_k \cdot 1) \\
&= \sum_{t_j \in \mathcal{T}_j} t_j \sum_{t_k \in \mathcal{T}_k} p(t_j, t_k) \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

# Lokale Unkorreliertheit

Beweis (fortgeführt)

(5) Wir halten zunächst fest, dass mit Aussage (4) durch Vertauschen der Indizes und der Symmetrie der Kovarianz auch

$$\mathbb{C}(\tau_k, \varepsilon_j) = \mathbb{C}(\varepsilon_j, \tau_k) = 0 \tag{12}$$

gilt. Mit dem Theorem zu den Eigenschaften der Kovarianz aus Einheit (2) Theoretische Grundlagen und Aussage (3) gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}(\upsilon_j, \upsilon_k) &= \mathbb{C}(\tau_j + \varepsilon_j, \tau_k + \varepsilon_k) \\
&= \mathbb{C}(\tau_j, \tau_k) + \mathbb{C}(\tau_j, \varepsilon_k) + \mathbb{C}(\varepsilon_j, \tau_k) + \mathbb{C}(\varepsilon_j, \varepsilon_k) \\
&= \mathbb{C}(\tau_j, \tau_k) + 0 + 0 + 0 \\
&= \mathbb{C}(\tau_j, \tau_k).
\end{aligned} \tag{13}$$

# Lokale Unkorreliertheit

## Beispiel

Wir betrachten den Fall zweier Testmessungen $j = 1, 2$ im Modell multipler Testmessungen.

Für $i = 1, ..., n$ seien

$$\mathbb{P}(\tau_{i1}, \tau_{i2}) = \mathbb{P}(\tau_{i2}|\tau_{i1})\mathbb{P}(\tau_{i1}) \tag{14}$$

mit

$$\mathbb{P}(\tau_{i1}) := N(1, 1) \text{ und } \mathbb{P}(\tau_{i2}|\tau_{i1}) := N(\tau_{i1} + 1, 1) \tag{15}$$

Die Verteilung des True-Score von Person $i$ in Testmessung $j = 2$ hängt also explizit von der Verteilung des True-Scores von Person $i$ in Testmessung $j = 1$ ab.

Weiterhin seien

$$\mathbb{P}(\upsilon_{i1}|\tau_{i1}) := N(\tau_{i1}, 1) \text{ und } \mathbb{P}(\upsilon_{i2}|\tau_{i2}) := N(\tau_{i2}, 2) \tag{16}$$

Die Propensitätsverteilungen von Person $i$ in Testmessung $j = 1$ unterscheide sich also von der von Person $i$ in Testmessung $j = 2$.

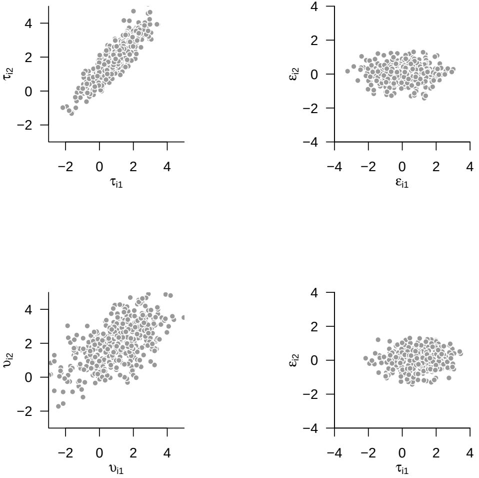
## Beispiel

```
n           = 1e5                                # Personenanzahl
m           = 2                                  # Testmessungsanzahl
mu          = 1                                  # True-Score Erwartungswertparameter
T           = matrix(rep(NaN, n*m), nrow = n)    # True-Score Array
Y           = matrix(rep(NaN, n*m), nrow = n)    # Observed-Score Array
E           = matrix(rep(NaN, n*m), nrow = n)    # Error-Score Array
for(i in 1:n){                                   # Iteration über Personen
    T[i,1]  = rnorm(1,1,1)                       # True-Score Realisierung     für j = 1
    Y[i,1]  = rnorm(1,T[i,1],1)                  # Observed-Score Realisierung für j = 1
    E[i,1]  = Y[i,1] - T[i,1]                    # Error-Score Realisierung    für j = 1
    T[i,2]  = rnorm(1,T[i,1] + 1,.5)             # True-Score Realisierung     für j = 2
    Y[i,2]  = rnorm(1,T[i,2],.5)                 # Observed-Score Realisierung für j = 2
    E[i,2]  = Y[i,2] - T[i,2]}                   # Error-Score Realisierung    für j = 2
c_hat_e1_e2 = cov(E[,1],E[,2])                   # Kovarianzschätzung Error-Score 1, Error-Score 2
c_hat_t1_e2 = cov(T[,1],E[,2])                   # Kovarianzschätzung True-Score 1, Error-Score 2
c_hat_o1_o2 = cov(Y[,1],Y[,2])                   # Kovarianzschätzung Observed-Score 1, Observed-Score 2
c_hat_t1_t2 = cov(T[,1],T[,2])                   # Kovarianzschätzung True-Score 1, True-Score 2
```

# Erste Modelleigenschaften

## Beispiel

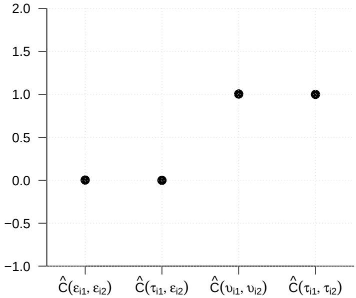
$n = 500$ Realisierungen



# Lokale Unkorreliertheit

Beispiel

$n = 10^4$ Realisierungen



Lokale Unkorreliertheit

**Parallelität**

Selbstkontrollfragen

# Parallelität

Bisher haben wir im Modell der multiplen Testmessungen keine Aussage zu den Verhältnissen der True-Scores über verschiedene Testmessungen hinweg gemacht. Wir haben einerseits angenommen, dass für die Marginalverteilung der Testmessungen bei einer Person $i$ keine Unabhängigkeit gelten muss, dass also im Allgemeinen gilt, dass für $i = 1, ..., n$

$$\mathbb{P}(\tau_{i1}, ..., \tau_{im}) \neq \prod_{j=1}^{m} \mathbb{P}(\tau_{ij}) \tag{17}$$

Andererseits haben wir die Form möglicher Abhängigkeiten zwischen den True-Scores $\tau_{i1}, ..., \tau_{im}$ bislang nicht genauer spezifiziert.

Die Klassische Testtheorie betrachtet in dieser Hinsicht einige Spezialfälle, die sich im Allgemeinen durch funktionale Abhängigkeiten zwischen $\tau_{i1}$ und $\tau_{i2}, ..., \tau_{im}$ der Form

$$\tau_{ij} = f(\tau_{i1}) \text{ für } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ und } j = 2, ..., m. \tag{18}$$

auszeichnen. Wir betrachten im Folgenden den Fall, dass $f := \text{id}_{\mathbb{R}}$, dass also insbesondere für Realisierungen $t_{ij}$ von $\tau_{ij}$ gilt, dass

$$t_{ij} = \text{id}_{\mathbb{R}}(t_{i1}) = t_{i1} \text{ für } j = 2, ..., m, \tag{19}$$

dass also die Werte der True-Scores einer Person über Testmessungen identisch sind. Die Klassische Testtheorie bezeichnet solche Testmessungen als *parallele Testmessungen*. Eine weitere Form der funktionalen Abhängigkeit, die wir hier nicht weiter vertiefen wollen, ist der Fall, dass es sich bei $f$ um eine linear-affine Funktion handelt, dass also

$$\tau_{ij} = f(\tau_{i1}) = a\tau_{i1} + b \text{ für } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } j = 2, ..., m. \tag{20}$$

Die Klassische Testtheorie bezeichnet solche Testmessungen als *wesentlich $\tau$-äquivalente Testmessungen*.

## Definition (Modell paralleler Testmessungen)

Für $i = 1, ..., n$ und $j = 1, ..., m$ sei

- $\tau_i$ eine Zufallsvariable, die den *True-Score* der $i$ten Person in jeder Testmessung $j = 1, ..., m$ modelliere,
- $\upsilon_{ij}$ eine Zufallsvariable, die den *Observed-Score* der $i$ten Person in der $j$ten Testmessung modelliere,
- $\varepsilon_{ij} := \upsilon_{ij} - \tau_i$ die Zufallsvariable, die den *Error-Score* der $i$ten Person in der $j$ten Testmessung modelliere.

Dann heißt die gemeinsame Verteilung der $\tau_i$ und $\upsilon_{ij}$ mit den Faktorisierungseigenschaften

$$\mathbb{P}\left(\tau_1, \upsilon_{11}, ...\upsilon_{1m}, ..., \tau_n, \upsilon_{n1}, ..., \upsilon_{nm}\right) := \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\tau_i) \prod_{j=1}^{m} \mathbb{P}(\upsilon_{ij}|\tau_i) \tag{21}$$

das *Modell paralleler Testmessungen*, wenn gilt, dass

(1) $\mathbb{P}(\tau_1) = \cdots = \mathbb{P}(\tau_n)$,

(2) $\mathbb{P}(\upsilon_{1j}|\tau_1) = \cdots = \mathbb{P}(\upsilon_{nj}|\tau_n)$ für alle $1 \le j \le m$,

(3) $\mathbb{E}(\upsilon_{ij}|\tau_i = t_i) = \mathbb{E}(\upsilon_{ik}|\tau_i = t_i) := t_i$ für alle $1 \le i \le n, 1 \le j, k \le n$,

(4) $\mathbb{V}(\upsilon_{ij}|\tau_i = t_i) = \mathbb{V}(\upsilon_{ik}|\tau_i = t_i)$ für alle $1 \le i \le n, 1 \le j, k \le n$.

# Parallelität

Bemerkungen

- Generative Sichtweise des Modells multipler paralleler Testmessungen

  (1) Für Person $i$ und Testmessungen $j = 1, ..., m$ wird zunächst ein True-Score $t_i$ von $\mathbb{P}(\tau_i)$ realisiert.

  (2) Für Person $i$ und Testmessung $j$ wird dann ein Observed-Score $y_{ij}$ anhand von $\mathbb{P}(\upsilon_{ij}|\tau_i = t_i)$ realisiert.

- Die Werte des True-Scores einer Person werden über Testmessungen als identisch angenommen.

- Die Observed-Score Varianz einer Person zwischen Messungen geht allein auf die Propensitätsverteilung zurück.

- Bei einer Testmessung hat das Modell paralleler Testmessungen die gleiche Form wie das Modell multipler Testmessungen. Das Theorem zu Ersten Eigenschaften des Modells multipler Testmessungen gilt also analog.

## Theorem (Eigenschaften des Modells paralleler Testmessungen)

Gegeben sei das Modell paralleler Testmessungen. Dann gelten für alle $i = 1, ..., n$ und alle $j, k$ mit $1 \leq j, k \leq m$ und $j \neq k$, dass

(1) $\mathbb{E}(\upsilon_{ij}) = \mathbb{E}(\upsilon_{ik})$

(2) $\mathbb{V}(\upsilon_{ij}) = \mathbb{V}(\upsilon_{ik})$

(3) $\mathbb{C}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ik}) = 0$

(4) $\mathbb{C}(\tau_i, \varepsilon_{ik}) = 0$

(5) $\mathbb{C}(\upsilon_{ij}, \upsilon_{ik}) = \mathbb{V}(\tau_i)$

Bemerkungen

- 1 besagt, dass bei Paralleltestmessungen alle Erwartungswerte der Observed Scores identisch sind.
- 2 besagt, dass bei Paralleltestmessungen alle Varianzen der Observed Scores identisch sind.
- 3 und 4 sind analog zu den lokalen Unkorreliertheitseigenschaften des Modells multipler Testmessungen.
- 5 besagt insbesondere, dass $\mathbb{C}(\upsilon_{ij}, \upsilon_{ik})$ für beliebe $j$ und $k$ identisch zu $\mathbb{V}(\tau_i)$ sind. Mit 2 sind im Modell paralleler Testmessungen also alle paarweisen Korrelationen verschiedener Testmessungen identisch.

# Parallelität

Beweis

Zum Beweis setzen zur Vereinfachung der Notation zunächst

$$\upsilon_j := \upsilon_{ij}, \upsilon_k := \upsilon_{ik}, \tau := \tau_i, y_j := y_{ij}, y_k := y_{ik}, t := t_i, \mathcal{Y}_j := \mathcal{Y}_{ij}, \mathcal{Y}_k := \mathcal{Y}_{ik} \text{ und } \mathcal{T} := \mathcal{T}_i \tag{22}$$

für alle $i = 1, ..., n$. Wir betrachten weiterhin (nur) den diskreten Fall, setzen also die Existenz einer Wahrscheinlichkeitsmassefunktion $p_{\tau,\upsilon}$ der Form

$$p(t, y_j, y_k) = p(y_j|t)p(y_k|t)p(t) \tag{23}$$

voraus. Der kontinuierliche Fall folgt dann analog.

(1) Mit der Gleichheit der bedingten Erwartungswerte im Falle paralleler Testmessungen gilt

$$\mathbb{E}(\upsilon_j) = \sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{y_j\in\mathcal{Y}_j} y_j p(y_j|t)p(t) = \sum_{t\in\mathcal{T}} \mathbb{E}(\upsilon_j|\tau = t)p(t) = \sum_{t\in\mathcal{T}} \sum_{y_k\in\mathcal{Y}_k} y_k p(y_k|t)p(t) = \mathbb{E}(\upsilon_k).$$

(2) Mit der Darstellung der Varianz aus Einheit (2) Theoretische Grundlagen, ergibt sich

$$\mathbb{V}(\upsilon_j) = \mathbb{V}\left(\mathbb{E}(\upsilon_j|\tau)\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{V}(\upsilon_j|\tau)\right) = \mathbb{V}\left(\mathbb{E}(\upsilon_k|\tau)\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{V}(\upsilon_k|\tau)\right) = \mathbb{V}(\upsilon_k).$$

# Parallelität

Beweis (fortgeführt)

(3) Wir bestimmen zunächst $\mathbb{E}(\varepsilon_j \varepsilon_k)$. Mit Aussage (2) des Theorems zu Ersten Eigenschaften des Modells multipler Testmessungen gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varepsilon_j \varepsilon_k) &:= \mathbb{E}((\upsilon_j - \tau)(\upsilon_k - \tau)) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{y_j \in \mathcal{Y}_j} \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} (y_j - t)(y_k - t) p(t) p(y_j|t) p(y_k|t) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{T}} p(t) \sum_{y_j \in \mathcal{Y}_j} \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} (y_j - t)(y_k - t) p(y_j|t) p(y_k|t) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{T}} p(t) \sum_{y_j \in \mathcal{Y}_j} (y_j - t) p(y_j|t) \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} (y_k - t) p(y_k|t) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{T}} p(t) \left( \sum_{y_j \in \mathcal{Y}_j} y_j p(y_j|t) - t \sum_{y_j \in \mathcal{Y}_j} p(y_j|t) \right) \left( \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} y_k p(y_k|t) - t \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} p(y_k|t) \right) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{T}} p(t) \, (t - t) \, (t - t) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{T}} p(t) \cdot 0 \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

# Parallelität

Beweis (fortgeführt)

Mit dem Kovarianzverschiebungssatz und wiederrum mit Aussage (2) des Theorems zu Ersten Eigenschaften des Modells multipler Testmessungen folgt dann

$$\mathbb{C}(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = \mathbb{E}(\varepsilon_j \varepsilon_k) - \mathbb{E}(\varepsilon_j)\mathbb{E}(\varepsilon_k) = 0 - 0 \cdot 0 = 0 \tag{25}$$

(4) Mit dem Kovarianzverschiebungssatz und Aussage (2) des Theorems zu Ersten Eigenschaften des Modells multipler Testmessungen gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}(\tau, \varepsilon_k) &= \mathbb{E}(\tau\varepsilon_k) - \mathbb{E}(\tau)\mathbb{E}(\varepsilon_k) \\
&= \mathbb{E}(\tau\varepsilon_k) - \mathbb{E}(\tau) \cdot 0 \\
&= \mathbb{E}(\tau(\upsilon_k - \tau)) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} t(y_k - t)p(t)p(y_k|t) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{T}} tp(t) \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} (y_k - t)p(y_k|t) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{T}} tp(t) \left( \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} y_k p(y_k|t) - t \sum_{y_k \in \mathcal{Y}_k} p(y_k|t) \right) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{T}} tp(t)\,(t - t) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{T}} tp(t) \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

Beweis (fortgeführt)

(5) Wir halten zunächst fest, dass mit Aussage (2) des Theorems neben $\mathbb{C}(\tau, \varepsilon_k) = 0$ durch Austausch des Index und der Symmetrie der Kovarianz auch

$$\mathbb{C}(\tau, \varepsilon_j) = \mathbb{C}(\varepsilon_j, \tau) = 0 \tag{27}$$

gilt. Mit dem Theorem zu den Eigenschaften der Kovarianz aus Einheit (2) Theoretische Grundlagen und Aussage (1) des Theorems gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}(\upsilon_j, \upsilon_k) &= \mathbb{C}(\tau + \varepsilon_j, \tau + \varepsilon_k) \\
&= \mathbb{C}(\tau, \tau) + \mathbb{C}(\tau, \varepsilon_k) + \mathbb{C}(\varepsilon_j, \tau) + \mathbb{C}(\varepsilon_j, \varepsilon_k) \\
&= \mathbb{C}(\tau, \tau) + 0 + 0 + 0 \\
&= \mathbb{C}(\tau, \tau) \\
&= \mathbb{V}(\tau).
\end{aligned} \tag{28}$$

## Beispiel

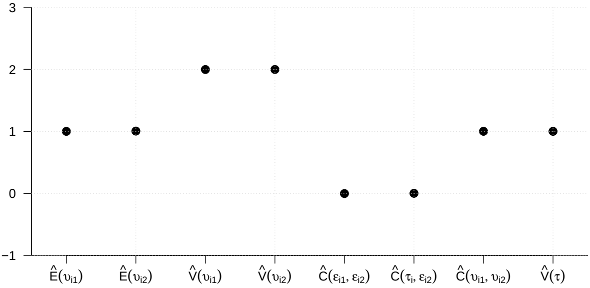
Wir betrachten den Fall zweier Testmessungen $j = 1, 2$ im Modell paralleler Testmessungen. Für $i = 1, ..., n$ seien

$$\mathbb{P}(\tau_i) = N(1, 1) \text{ und } \mathbb{P}(\upsilon_{i1}|\tau_i) := \mathbb{P}(\upsilon_{i2}|\tau_i) := N(\tau_i, 1) \tag{29}$$

Für Person $i$ gibt es also nur eine True-Score Zufallsvariable für alle Testmessungen und die Propensitätsverteilungen unterscheiden sich zwischen Testmessungen nicht.

```
n           = 1e5                                 # Personenanzahl
m           = 2                                   # Testmessungsanzahl
T           = matrix(rep(NaN, n)   , nrow = n)    # True-Score Array
Y           = matrix(rep(NaN, n*m), nrow = n)     # Observed-Score Array
E           = matrix(rep(NaN, n*m), nrow = n)     # Error-Score Array
for(i in 1:n){                                    # Personeniterationen
    T[i]   = rnorm(1,1,1)                         # True-Score Realisierung für j = 1,2
    for(j in 1:m){                                # Testmessungsiterationen
        Y[i,j]   = rnorm(1,T[i],1)                # Observed-Score Realisierung f
        E[i,j]   = Y[i,j] - T[i]}}                # Error-Score Realisierung
e_hat_o1_o2 = apply(Y, 2, mean)                   # Erwartungswertschätzung Observed-Score 1, Observed-Score 2
v_hat_o1_o2 = apply(Y, 2, var)                    # Varianzzschätzung Observed-Score 1, Observed-Score 2
c_hat_e1_e2 = cov(E[,1],E[,2])                    # Kovarianzzschätzung Error-Score 1, Error-Score 2
c_hat_t_e2  = cov(T    ,E[,2])                    # Kovarianzzschätzung True-Score 1, Error-Score 2
c_hat_o1_o2 = cov(Y[,1],Y[,2])                    # Kovarianzzschätzung Observed-Score 1, Observed-Score 2
v_hat_t     = var(T)                              # Varianzschätzung True-Score
```

Beispiel



Lokale Unkorreliertheit

Parallelität

**Selbstkontrollfragen**

# Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie das Theorem zur Lokalen Unkorreliertheit wieder.

2. Geben Sie die Definition des Modells paralleler Testmessungen wieder.

3. Geben Sie das Theorem zu den Eigenschaften des Modells paralleler Testmessungen wieder.