Testtheorie und Testkonstruktion

MSc Klinische Psychologie und Psychotherapie

SoSe 2024

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(2) Theoretische Grundlagen

Beispielaussagen zur Reliabilität des BDI-II

Retest-Reliabilität

In der Studie von Beck et al. (1996) resultierte bei 26 Patienten, die im Abstand von einer Woche untersucht wurden, ein Retestkoeffizient von $\mathrm{r_{tt}} = .93$. Aus Studentenstichproben werden für ein- bis zweiwöchige Zeiträume Koeffizienten von $\mathrm{r_{tt}} = .74 - .96$ berichtet (Leigh &Antony-Tolbert, 2001; Al-Musawi, 2001; Sprinkle, Lurie, Insko et al., 2002; Ghassemzadeh, Mojtabai, Karamghadiri & Ebrahimkhani, 2005).

Interne Konsistenz

In Tabelle 2 sind bisherige Ergebnisse zur internen Konsistenz (Cronbach's α) des BDI II aufgelistet. In psychiatrischen Stichproben lag die interne Konsistenz im Bereich von $.89 \leq \alpha \leq .94$, in nichtklinischen Stichproben im Bereich von $.84 \leq \alpha \leq .91$.

Hautzinger, Keller, and Kühner (2006)

Überblick

Die Klassische Testtheorie ist zunächst einmal eine *Reliabilitätstheorie*

Wir gehen davon aus, dass Begrifflichkeiten wie *Paralleltestreliabilität, Retestreliabilität, Cronbach's α, Spearman-Brown-Formel* aus dem Bachelor schon bekannt, aber nicht wirklich formal verstanden sind.

Insbesondere wollen wir im Seminar folgende Partikularitäten der Klassischen Testheorie erläutern:

- Warum kann die Reliabilität eines Tests einerseits über die Korrelation von True-Scores und Observed Scores definiert sein, gleichzeitig aber allein über die Korrelation der Observed Scores mehrerer Tests bestimmt werden?
- Woher kommt die Formel für Cronbach's α und wann und warum gilt sie?
- Woher kommt die Spearman-Brown Formel und wann und warum gilt sie?

Zur Beantwortung dieser Fragen müssen wir einiges an Vorarbeit leisten

(1) Wiederholung allgemeiner Grundlagen zu Erwartungswerten, Varianzen, Kovarianzen, Korrelation
(2) Explizite Formulierung des Modells der Klassischen Testtheorie
(3) Definition von Paralleltests
(4) Definition der Reliabilität

Basierend auf diesen Vorarbeiten sind dann Antworten auf obige Fragen möglich.

Überblick

Motivation zur Einheit (2) Theoretische Grundlagen

- Die Klassische Testtheorie ist ein Verteilungsannahmen-freies probabilistisches Modell.
- Die zentralen zwei Zufallsvariablen modellieren True Scores und Observed Scores.
- Der True Score einer Person wird als aus einer interindividuellen Population zufällig realisiert angenommen.
- Der Observed Score wird als aus einer bedingten intraindividuellen Verteilung realisiert angenommen.
- Zentrale Konzepte sind dabei Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen von Zufallsvariablen.
- Wir wiederholen hier deshalb einige grundlegende Eigenschaften dieser Konzepte.
- Ein weiteres zentrales Konzept der Modellbildung ist der bedingte Erwartungswert, den wir hier einführen.

Erwartungswert, Varianz, Kovarianz, Korrelation

Bedingte Erwartungswerte

Selbstkontrollfragen

Erwartungswert, Varianz, Kovarianz, Korrelation

Bedingte Erwartungswerte

Selbstkontrollfragen

Definition (Erwartungswert)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und ξ sei eine Zufallsvariable. Dann ist der *Erwartungswert von* ξ definiert als

- $\mathbb{E}(\xi) := \sum_{x \in \mathcal{X}} x\, p_\xi(x)$, wenn $\xi : \Omega \to \mathcal{X}$ diskret mit WMF p_ξ und Ergebnisraum $\mathcal{X}$ ist,
- $\mathbb{E}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} x\, p_\xi(x)\, dx$, wenn $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ kontinuierlich mit WDF p_ξ ist.

Der Erwartungswert einer Zufallsvariable heißt *existent*, wenn er endlich ist.

Bemerkungen

- Der Erwartungswert ist eine skalare Zusammenfassung einer Verteilung.
- Intuitiv ist $\mathbb{E}(\xi) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ für eine große Zahl n von Kopien ξ_i von ξ.

Beispiel (Erwartungswert)

Für eine diskrete Zufallsvariable ξ, die Werte in $\mathcal{X} := \{-1, 0, 1\}$ annehme und deren WMF p_ξ gegeben sei durch

$$p_\xi(-1) = \frac{1}{4} \quad p_\xi(0) = \frac{1}{2} \quad p_\xi(1) = \frac{1}{4}, \tag{1}$$

ergibt sich der Erwartungswert zu

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi) &= \sum_{x \in \mathcal{X}} x \, p_\xi(x) \\
&= -1 \cdot p_\xi(-1) + 0 \cdot p_\xi(0) + 1 \cdot p_\xi(1) \\
&= -1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Theorem (Eigenschaften des Erwartungswerts)

(1) (Linear-affine Transformation) Für eine Zufallsvariable ξ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}(a\xi + b) = a\mathbb{E}(\xi) + b. \tag{3}$$

(2) (Linearkombination) Für Zufallsvariablen $\xi_1, ..., \xi_n$ und $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}(\xi_i). \tag{4}$$

(3) (Faktorisierung bei Unabhängigkeit) Für unabhängige Zufallsvariablen $\xi_1, ..., \xi_n$ gilt

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \xi_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(\xi_i). \tag{5}$$

Bemerkung

- Für einen Beweis, siehe Probabilistische Datenwissenschaft für die Psychologie.

Definition (Varianz und Standardabweichung)

Es sei ξ eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}(\xi)$. Die *Varianz von* ξ ist definiert als

$$\mathbb{V}(\xi) := \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2\right), \tag{6}$$

unter der Annahme, dass dieser Erwartungswert existiert. Die *Standardabweichung von* ξ ist definiert

$$\mathbb{S}(\xi) := \sqrt{\mathbb{V}(\xi)}. \tag{7}$$

Bemerkungen

- Die Varianz misst die Streuung (Breite) einer Verteilung.
- Quadration ist nötig wegen $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi)) = \mathbb{E}(\xi) - \mathbb{E}(\xi) = 0$.

Beispiel (Varianz und Standardabweichung)

Für eine diskrete Zufallsvariable ξ, die Werte in $\mathcal{X} := \{-1, 0, 1\}$ annehme und deren WMF p_ξ gegeben sei durch

$$p_\xi(-1) = \frac{1}{4} \quad p_\xi(0) = \frac{1}{2} \quad p_\xi(1) = \frac{1}{4}, \tag{8}$$

ergibt sich die Varianz mithilfe des oben bestimmten Erwartungswerts dieser Zufallsvariable zu

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\xi) &= \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((\xi - 0)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\xi^2\right) \\
&= \sum_{x \in \mathcal{X}} x^2 \, p_\xi(x) \\
&= (-1)^2 \cdot p_\xi(-1) + 0^2 \cdot p_\xi(0) + 1^2 \cdot p_\xi(1) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Für die Standardabweichung von ξ folgt demnach

$$\mathbb{S}(\xi) = \sqrt{\mathbb{V}(\xi)} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{10}$$

Theorem (Nichtnegativität und Varianzverschiebungssatz)

(1) (Nichtnegativität) ξ sei eine Zufallsvariable. Dann gilt

$$\mathbb{V}(\xi) \geq 0. \tag{11}$$

(2) (Varianzverschiebungssatz) ξ sei eine Zufallsvariable. Dann gilt

$$\mathbb{V}(\xi) = \mathbb{E}\left(\xi^2\right) - \mathbb{E}(\xi)^2. \tag{12}$$

Bemerkung

- Für Beweise, siehe Probabilistische Datenwissenschaft für die Psychologie.

Definition (Kovarianz und Korrelation)

Die *Kovarianz* zweier Zufallsvariablen ξ und υ ist definiert als

$$\mathbb{C}(\xi, \upsilon) := \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))\,(\upsilon - \mathbb{E}(\upsilon))\right). \tag{13}$$

Die *Korrelation* zweier Zufallsvariablen ξ und υ ist definiert als

$$\rho(\xi, \upsilon) := \frac{\mathbb{C}(\xi, \upsilon)}{\sqrt{\mathbb{V}(\xi)}\sqrt{\mathbb{V}(\upsilon)}} = \frac{\mathbb{C}(\xi, \upsilon)}{\mathbb{S}(\xi)\mathbb{S}(\upsilon)}. \tag{14}$$

Bemerkungen

- Die Kovarianz von ξ mit sich selbst ist die Varianz von ξ,

$$\mathbb{C}(\xi, \xi) = \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2\right) = \mathbb{V}(\xi). \tag{15}$$

- $\rho(\xi, \upsilon)$ wird auch *Korrelationskoeffizient* von ξ und υ genannt.
- Wenn $\rho(\xi, \upsilon) = 0$ ist, werden ξ und υ *unkorreliert* genannt.
- Kovarianz und Korrelation sind (nur) Maße für linear-affine Abhängigkeiten der Form $\upsilon = a\xi + b$
- Aus Unabhängigkeit von Zufallsvariablen folgt Unkorreliertheit, aber nicht andersherum.
- Für weitere Details, siehe Probabilistische Datenwissenschaft für die Psychologie

Beispiel (Kovarianz und Korrelation zweier diskreter Zufallsvariablen)

Es sei $\zeta := (\xi, \upsilon)$ ein Zufallsvektor mit WMF $p_{\xi,\upsilon}$ definiert durch

$p_{\xi,\upsilon}(x,y)$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$p_\xi(x)$
$x=1$	0.10	0.05	0.15	0.30
$x=2$	0.60	0.05	0.05	0.70
$p_\upsilon(y)$	0.70	0.10	0.20	

ξ, υ sind also zwei Zufallsvariablen mit einer definierten bivariaten Verteilung. Um $\mathbb{C}(\xi,\upsilon)$ und $\rho(\xi,\upsilon)$ zu berechnen, halten wir zunächst fest, dass

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{x=1}^{2} x p_\xi(x) = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.7 = 1.7 \tag{16}$$

und

$$\mathbb{E}(\upsilon) = \sum_{y=1}^{3} y p_\upsilon(y) = 1 \cdot 0.7 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.2 = 1.5. \tag{17}$$

Mit der Definition der Kovarianz von ξ und υ, gilt dann

Erwartungswert, Varianz und Kovarianz

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}(\xi, \upsilon) &= \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))(\upsilon - \mathbb{E}(\upsilon))) \\
&= \sum_{x=1}^{2} \sum_{y=1}^{3} (x - \mathbb{E}(\xi))(y - \mathbb{E}(\upsilon)) p_{\xi,\upsilon}(x, y) \\
&= \sum_{x=1}^{2} \sum_{y=1}^{3} (x - 1.7)(y - 1.5) p_{\xi,\upsilon}(x, y) \\
&= \sum_{x=1}^{2} (x - 1.7)(1 - 1.5) p_{\xi,\upsilon}(x, 1) \\
&\qquad + (x - 1.7)(2 - 1.5) p_{\xi,\upsilon}(x, 2) \\
&\qquad + (x - 1.7)(3 - 1.5) p_{\xi,\upsilon}(x, 3) \\
&= \quad (1 - 1.7)(1 - 1.5) p_{\xi,\upsilon}(1, 1) + (1 - 1.7)(2 - 1.5) p_{\xi,\upsilon}(1, 2) + (1 - 1.7)(3 - 1.5) p_{\xi,\upsilon}(1, 3) \\
&\quad + (2 - 1.7)(1 - 1.5) p_{\xi,\upsilon}(2, 1) + (2 - 1.7)(2 - 1.5) p_{\xi,\upsilon}(2, 2) + (2 - 1.7)(3 - 1.5) p_{\xi,\upsilon}(2, 3) \\
&= \quad (-0.7) \cdot (-0.5) \cdot 0.10 + (-0.7) \cdot 0.5 \cdot 0.05 + (-0.7) \cdot 1.5 \cdot 0.15 \\
&\quad + 0.3 \cdot (-0.5) \cdot 0.60 + 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 1.5 \cdot 0.05 \\
&= 0.035 - 0.0175 - 0.1575 - 0.09 + 0.0075 + 0.0225 \\
&= -0.2.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Theorem (Symmetrie und Kovarianzverschiebungssatz)

(1) (Symmetrie) ξ und υ seien zwei Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\mathbb{C}(\xi, \upsilon) = \mathbb{C}(\upsilon, \xi). \tag{19}$$

(2) (Kovarianzverschiebungssatz) ξ und υ seien zwei Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\mathbb{C}(\xi, \upsilon) = \mathbb{E}(\xi\upsilon) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\upsilon). \tag{20}$$

Bemerkung

- Für Beweise von (1) und (2), siehe Probabilistische Datenwissenschaft für die Psychologie.

Theorem (Kovarianz von Linearkombinationen von Zufallsvariablen)

Gegeben seien n Zufallsvariablen $\xi_1, ..., \xi_n$ und $n+1$ reelle Konstanten $a_0, a_1, ..., a_n$ sowie m Zufallsvariablen $\upsilon_1, ..., \upsilon_m$ und $m+1$ reelle Konstanten $b_0, b_1, ..., b_m$. Dann gilt

$$\mathbb{C}\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \xi_i, b_0 + \sum_{j=1}^m b_j \upsilon_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \mathbb{C}(\xi_i, \upsilon_j). \tag{21}$$

Bemerkungen

- Es muss nicht $n = m$ gelten.

Beweis

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{C}\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i\xi_i, b_0 + \sum_{j=1}^m b_j\upsilon_j\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i\xi_i - \mathbb{E}\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i\xi_i\right)\right)\left(b_0 + \sum_{j=1}^m b_j\upsilon_j - \mathbb{E}\left(b_0 + \sum_{j=1}^m b_j\upsilon_j\right)\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i\xi_i - a_0 - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i\xi_i\right)\right)\left(b_0 + \sum_{j=1}^m b_j\upsilon_j - b_0 - \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^m b_j\upsilon_j\right)\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i\xi_i - \sum_{i=1}^n a_i\mathbb{E}(\xi_i)\right)\left(\sum_{j=1}^m b_j\upsilon_j - \sum_{j=1}^m b_j\mathbb{E}(\upsilon_j)\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i\xi_i\sum_{j=1}^m b_j\upsilon_j - \sum_{i=1}^n a_i\xi_i\sum_{j=1}^m b_j\mathbb{E}(\upsilon_j) - \sum_{i=1}^n a_i\mathbb{E}(\xi_i)\sum_{j=1}^m b_j\upsilon_j + \sum_{i=1}^n a_i\mathbb{E}(\xi_i)\sum_{j=1}^m b_j\mathbb{E}(\upsilon_j)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i\xi_i\sum_{j=1}^m b_j\upsilon_j\right) - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i\xi_i\sum_{j=1}^m b_j\mathbb{E}(\upsilon_j)\right) - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i\mathbb{E}(\xi_i)\sum_{j=1}^m b_j\upsilon_j\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i\mathbb{E}(\xi_i)\sum_{j=1}^m b_j\mathbb{E}(\upsilon_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_ib_j\mathbb{E}(\xi_i\upsilon_j) - 2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_ib_j\mathbb{E}(\xi_i)\mathbb{E}(\upsilon_j) + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_ib_j\mathbb{E}(\xi_i)\mathbb{E}(\upsilon_j) \\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_ib_j\left(\mathbb{E}(\xi_i\upsilon_j) - 2\mathbb{E}(\xi_i)\mathbb{E}(\upsilon_j) + \mathbb{E}(\xi_i)\mathbb{E}(\upsilon_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_ib_j\mathbb{E}\left((\xi_i - \mathbb{E}(\xi_i))(\upsilon_j - \mathbb{E}(\upsilon_j))\right) \\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_ib_j\mathbb{C}(\xi_i, \upsilon_j)
\end{aligned}
$$

Theorem (Kovarianzen spezieller Zufallsvariablenlinearkombinationen)

(1) (Kovarianz bei linear-affiner Transformation) Gegeben seien zwei Zufallsvariablen ξ und υ und reelle Konstanten a, b, c, d. Dann gilt

$$\mathbb{C}(a\xi + c, b\upsilon + d) = ab\mathbb{C}(\xi, \upsilon). \tag{22}$$

(2) (Kovarianz bei paarweiser Addition). Gegeben seien vier Zufallsvariablen $\xi_1, \xi_2, \upsilon_1, \upsilon_2$. Dann gilt

$$\mathbb{C}(\xi_1 + \xi_2, \upsilon_1 + \upsilon_2) = \mathbb{C}(\xi_1, \upsilon_1) + \mathbb{C}(\xi_1, \upsilon_2) + \mathbb{C}(\xi_2, \upsilon_1) + \mathbb{C}(\xi_2, \upsilon_2). \tag{23}$$

Bemerkung

- Das Theorem ist eine direkte Folge des Theorems zur Kovarianz von Linearkombinationen von Zufallsvariablen.

Beweis

(1) Es seien $n := 1, m := 1, \xi_1 := \xi, \upsilon_1 := \upsilon, a_0 := c, a_1 := a, b_0 := c, b_1 := b$. Dann gilt mit dem Theorem zur Kovarianz von Linearkombinationen von Zufallsvariablen

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}(a\xi + c, b\upsilon + d) &= \mathbb{C}\left(a_1\xi_1 + a_0, b_1\upsilon_1 + b_0\right) \\
&= \mathbb{C}\left(a_0 + a_1\xi_1, b_0 + b_1\upsilon_1\right) \\
&= \sum_{i=1}^{1}\sum_{j=1}^{1} a_i b_j \mathbb{C}(\xi_i, \upsilon_j) \\
&= a_1 b_1 \mathbb{C}(\xi_1, \upsilon_1) \\
&= ab\mathbb{C}(\xi_1, \upsilon_1).
\end{aligned} \tag{24}
$$

(2) Es seien $n := 2, m := 2, a_0 = b_0 := 0$ und $a_i = b_i := 1$ für $i = 1, 2$. Dann gilt mit dem Theorem zur Kovarianz von Linearkombinationen von Zufallsvariablen

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}\left(\xi_1 + \xi_2, \upsilon_1 + \upsilon_2\right) &= \mathbb{C}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{2} a_i\xi_i, b_0 + \sum_{j=1}^{2} b_j\upsilon_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_i b_j \mathbb{C}\left(\xi_i, \upsilon_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \mathbb{C}\left(\xi_i, \upsilon_j\right) \\
&= \mathbb{C}\left(\xi_1, \upsilon_1\right) + \mathbb{C}\left(\xi_1, \upsilon_2\right) + \mathbb{C}\left(\xi_2, \upsilon_1\right) + \mathbb{C}\left(\xi_2, \upsilon_2\right).
\end{aligned} \tag{25}
$$

Theorem (Varianz einer Linearkombination von Zufallsvariablen)

Gegeben seien n Zufallsvariablen $\xi_1, ..., \xi_n$ und $n+1$ reelle Konstanten $a_0, a_1, ..., a_n$. Dann gilt

$$\mathbb{V}\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbb{V}(\xi_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^n a_i a_j \mathbb{C}(\xi_i, \xi_j). \tag{26}$$

Bemerkung

- Das Theorem ist ein weitere Folge des Theorems zur Kovarianz von Linearkombinationen von Zufallsvariablen.

Beweis

Mit $\mathbb{V}(\xi) = \mathbb{C}(\xi, \xi)$ und dem Theorem zur Kovarianz von Linearkombinationen von Zufallsvariablen gilt zunächst

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \xi_i\right) &= \mathbb{C}\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \xi_i, a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \xi_i\right) \\
&= \mathbb{C}\left(a_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i, a_0 + \sum_{j=1}^n a_j \xi_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \mathbb{C}(\xi_i, \xi_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j=i}}^n a_i a_j \mathbb{C}(\xi_i, \xi_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_i a_j \mathbb{C}(\xi_i, \xi_j) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i a_i \mathbb{C}(\xi_i, \xi_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_i a_j \mathbb{C}(\xi_i, \xi_j) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbb{V}(\xi_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_i a_j \mathbb{C}(\xi_i, \xi_j) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbb{V}(\xi_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_i a_j \mathbb{C}(\xi_i, \xi_j),
\end{aligned} \tag{27}
$$

Erwartungswert, Varianz und Kovarianz

Beweis (fortgeführt)

Dabei wurde in der vierten Gleichung die Doppelsumme in solche Terme aufgespalten für die $i = j$ und für die $i \neq j$ und in siebten Gleichung ausgenutzt, dass

$$a_i a_j \mathbb{C}(\xi_i, \xi_j) = a_j a_i \mathbb{C}(\xi_j, \xi_i). \tag{28}$$

Wir verdeutlichen die darausfolgende Identität

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_i a_j \mathbb{C}(\xi_i, \xi_j) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j \mathbb{C}(\xi_i, \xi_j), \tag{29}$$

am Beispiel $n = 3$ untenstehend. Analog mag man sich vorstellen, über alle Elemente außer der Diagonalelemente der $i = 1, ..., n$ Zeilen und $j = 1, ..., n$ Spalten einer symmetrischen Matrix mit Einträgen $a_i a_j \mathbb{C}(\xi_i, \xi_j)$ zu summieren. Die linke Seite oberer Gleichung entspricht dann dem zeilenweisen Vorgehen der Summationsbildung für alle Spalteneinträge außer dem, der in der Spalte der jeweils betrachteten Zeile steht, d.h. dem Diagonaleintrag. Die rechte Seite der obigen Gleichung entspricht dann dem Vorgehen, die Symmetrie der Matrix auszunutzen, also die Tatsache zu berücksichtigen, dass die Einträge der Matrix rechts oberhalb und links unterhalb der Diagonalen identisch sind, so dass es genügt, die Einträge der oberen linke Hälfte aufzuaddieren und zu verdoppeln. Dabei werden für jede Zeile $i = 1, ..., n$ nur gerade die Spalten $j = i + 1, ..., n$ betrachtet, die rechts von der Diagonale stehen und ihre Einträge aufsummiert. In der letzten Zeile steht dabei nur ein Diagonalelement, das nicht zur Summe gehört, weshalb der Index der äußeren Summe nur bis $n - 1$ läuft.

Beweis (fortgeführt)

Konkret ergibt sich für $n := 3$

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{3} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} a_i a_j \mathbb{C}(\xi_i, \xi_j) \\
& = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{3} a_1 a_j \mathbb{C}(\xi_1, \xi_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{3} a_2 a_j \mathbb{C}(\xi_2, \xi_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^{3} a_3 a_j \mathbb{C}(\xi_3, \xi_j) \\
& = a_1 a_2 \mathbb{C}(\xi_1, \xi_2) + a_1 a_3 \mathbb{C}(\xi_1, \xi_3) + a_2 a_1 \mathbb{C}(\xi_2, \xi_1) + a_2 a_3 \mathbb{C}(\xi_2, \xi_3) + a_3 a_1 \mathbb{C}(\xi_3, \xi_1) + a_3 a_2 \mathbb{C}(\xi_3, \xi_2) \\
& = a_1 a_2 \mathbb{C}(\xi_1, \xi_2) + a_2 a_1 \mathbb{C}(\xi_2, \xi_1) + a_1 a_3 \mathbb{C}(\xi_1, \xi_3) + a_3 1 a_1 \mathbb{C}(\xi_3, \xi_1) + a_2 a_3 \mathbb{C}(\xi_2, \xi_3) + a_3 a_2 \mathbb{C}(\xi_3, \xi_2) \\
& = 2\mathbb{C}(\xi_1, \xi_2) + 2\mathbb{C}(\xi_1, \xi_3) + 2\mathbb{C}(\xi_2, \xi_3) \qquad (30) \\
& = 2 a_1 a_2 \left(\mathbb{C}(\xi_1, \xi_2) + a_1 a_3 \mathbb{C}(\xi_1, \xi_3) + a_2 a_3 \mathbb{C}(\xi_2, \xi_3)\right) \\
& = 2 \left(\sum_{j=2}^{3} a_1 a_j \mathbb{C}(\xi_1, \xi_j) + \sum_{j=3}^{3} a_2 a_j \mathbb{C}(\xi_2, \xi_j) \right) \\
& = 2 \left(\sum_{j=1+1}^{3} a_1 a_j \mathbb{C}(\xi_1, \xi_j) + \sum_{j=2+1}^{3} a_2 a_j \mathbb{C}(\xi_2, \xi_j) \right) \\
& = 2 \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} a_i a_j \mathbb{C}(\xi_i, \xi_j).
\end{aligned}
$$

Theorem (Varianzen spezieller Linearkombinationen von Zufallsvariablen)

(1) (Kovarianz bei linear-affiner Transformation) Gegeben seien eine Zufallsvariable ξ und reelle Konstanten a und b. Dann gilt

$$\mathbb{V}(a\xi + b) = a^2\mathbb{V}(\xi). \tag{31}$$

(2) (Varianz bei Addition zweier Zufallsvariablen). Gegeben seien zwei Zufallsvariablen ξ und υ. Dann gilt

$$\mathbb{V}(\xi + \upsilon) = \mathbb{V}(\xi) + \mathbb{V}(\upsilon) + 2\mathbb{C}(\xi, \upsilon) \tag{32}$$

(3) (Varianz bei Subtraktion zweier Zufallsvariablen). Gegeben seien zwei Zufallsvariablen ξ und υ. Dann gilt

$$\mathbb{V}(\xi - \upsilon) = \mathbb{V}(\xi) + \mathbb{V}(\upsilon) - 2\mathbb{C}(\xi, \upsilon) \tag{33}$$

Bemerkung

- Das Theorem ist eine direkte Folge des Theorems zur Varianz einer Linearkombination von Zufallsvariablen

Beweis

(1) Es seien $n := 1$, $a_0 := b$ und $a_1 := a$. Dann gilt mit dem Theorem zur Varianz einer Linearkombination von Zufallsvariablen

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(a\xi + b) &= \mathbb{V}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{1} a_i \xi_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{1} a_i^2 \mathbb{V}(\xi_i) + 2\sum_{i=1}^{1-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j \mathbb{C}(\xi_i, \xi_j) \\
&= a_1^2 \mathbb{V}(\xi_1) \\
&= a^2 \mathbb{V}(\xi)
\end{aligned} \tag{34}
$$

Beweis (fortgeführt)

(2) Es seien $n := 2$, $\xi_1 := \xi$, $\xi_2 := \upsilon$, $a_0 := 0$, $a_1 := 1$ und $a_2 := 1$. Dann gilt mit dem Theorem zur Varianz einer Linearkombination von Zufallsvariablen

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(\xi + \upsilon) &= \mathbb{V}(a_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2) \\
&= \mathbb{V}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{2} a_i\xi_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2} a_i^2\mathbb{V}(\xi_i) + 2\sum_{i=1}^{2-1}\sum_{j=i+1}^{2} a_i a_j \mathbb{C}(\xi_i, \xi_j) \\
&= \sum_{i=1}^{2} a_i^2\mathbb{V}(\xi_i) + 2\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=i+1}^{2} a_i a_j \mathbb{C}(\xi_i, \xi_j) \\
&= \sum_{i=1}^{2} a_i^2\mathbb{V}(\xi_i) + 2\sum_{j=1+1}^{2} a_i a_j \mathbb{C}(\xi_1, \xi_j) \\
&= \sum_{i=1}^{2} a_i^2\mathbb{V}(\xi_i) + 2\sum_{j=2}^{2} a_1 a_j \mathbb{C}(\xi_1, \xi_j) \\
&= a_1^2\mathbb{V}(\xi_1) + a_2^2\mathbb{V}(\xi_2) + 2a_1a_2\mathbb{C}(\xi_1, \xi_2) \\
&= 1^2 \cdot \mathbb{V}(\xi) + 1^2 \cdot \mathbb{V}(\upsilon) + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \mathbb{C}(\xi, \upsilon) \\
&= \mathbb{V}(\xi) + \mathbb{V}(\upsilon) + 2\mathbb{C}(\xi, \upsilon)
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Beweis (fortgeführt)

(3) Es seien $n := 2$, $\xi_1 := \xi$, $\xi_2 := \upsilon$, $a_0 := 0$, $a_1 := 1$ und $a_2 := -1$. Dann gilt mit dem Theorem zur Varianz einer Linearkombination von Zufallsvariablen

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(\xi - \upsilon) &= \mathbb{V}(a_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2) \\
&= \mathbb{V}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{2} a_i\xi_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2} a_i^2 \mathbb{V}(\xi_i) + 2\sum_{i=1}^{2-1}\sum_{j=i+1}^{2} a_i a_j \mathbb{C}(\xi_i, \xi_j) \\
&= \sum_{i=1}^{2} a_i^2 \mathbb{V}(\xi_i) + 2\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=i+1}^{2} a_i a_j \mathbb{C}(\xi_i, \xi_j) \\
&= \sum_{i=1}^{2} a_i^2 \mathbb{V}(\xi_i) + 2\sum_{j=1+1}^{2} a_i a_j \mathbb{C}(\xi_1, \xi_j) \\
&= \sum_{i=1}^{2} a_i^2 \mathbb{V}(\xi_i) + 2\sum_{j=2}^{2} a_1 a_j \mathbb{C}(\xi_1, \xi_j) \\
&= a_1^2\mathbb{V}(\xi_1) + a_2^2\mathbb{V}(\xi_2) + 2a_1a_2\mathbb{C}(\xi_1, \xi_2) \\
&= 1^2 \cdot \mathbb{V}(\xi) + (-1)^2 \cdot \mathbb{V}(\upsilon) + 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot \mathbb{C}(\xi, \upsilon) \\
&= \mathbb{V}(\xi) + \mathbb{V}(\upsilon) - 2\mathbb{C}(\xi, \upsilon)
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Erwartungswert, Varianz, Kovarianz, Korrelation

Bedingte Erwartungswerte

Selbstkontrollfragen

Bedingte Erwartungswerte

Definition (Bedingter Erwartungswert)

Gegeben sei ein Zufallsvektor $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ mit Ergebnisraum $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ WMF oder WDF p_{ξ_1,ξ_2} und bedingter WMF oder WDF $p_{\xi_1|\xi_2=x_2}$ für alle $x_2 \in \mathcal{X}_2$. Dann ist der *bedingte Erwartungswert von* ξ_1 *gegeben* $\xi_2 = x_2$ definiert als

- $\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = x_2) := \sum_{x_1 \in \mathcal{X}_1} x_1 p_{\xi_1|\xi_2=x_2}(x_1|x_2)$, wenn ξ ein diskreter Zufallsvektor ist,
- $\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = x_2) := \int_{\mathcal{X}_1} x_1 p_{\xi_1|\xi_2=x_2}(x_1|x_2)\,dx_1$, wenn ξ ein kontinuierlicher Zufallsvektor ist

Bemerkungen

- Wir definieren den bedingten Erwartungswert hier für einen festen Wert x_2 von ξ_2.
- Bei einem festen Wert x_2 von ξ_2 ist $\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = x_2)$ ein fester Wert.
- Durch Austauschen der Subskripte erhält man entsprechend $\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = x_1)$
- Allgemein ist $\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)$ eine Zufallsvariable, da ξ_2 eine Zufallsvariable ist.
- Analog werdebedingte Varianzen, Kovarianzen, und Korrelationen definieren.
- True-Scores sind in der klassischen Testtheorie als bedingte Erwartungswerte definiert.

Bedingte Erwartungswerte

Beispiel (Bedingter Erwartungswert)

Für einen zweidimensionalen Zufallsvektor $\xi := (\xi_1, \xi_2)$, der Werte in $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ annehme, wobei $\mathcal{X}_1 := \{1,2,3\}$ und $\mathcal{X}_2 = \{1,2,3,4\}$ seien, seien die bedingte WMFen für $p_{\xi_2|\xi_1=x_1}$ für alle $x_1 \in \mathcal{X}_1$ geben als

$p_{\xi_2\|\xi_1}(x_2\|x_1)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$
$p_{\xi_2\|\xi_1=1}(x_2\|x_1 = 1)$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$p_{\xi_2\|\xi_1=2}(x_2\|x_1 = 2)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
$p_{\xi_2\|\xi_1=3}(x_2\|x_1 = 3)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Dann ergeben sich die bedingten Erwartungswerte

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = 1) &= \sum_{x_2 \in \mathcal{X}_2} x_2 p_{\xi_2|\xi_1=1}(x_2|x_1 = 1) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \\
\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = 2) &= \sum_{x_2 \in \mathcal{X}_2} x_2 p_{\xi_2|\xi_1=2}(x_2|x_1 = 2) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = \frac{5}{3} \\
\mathbb{E}(\xi_2|\xi_1 = 3) &= \sum_{x_2 \in \mathcal{X}_2} x_2 p_{\xi_2|\xi_1=3}(x_2|x_1 = 3) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Definition (Bedingte Varianz)

Gegeben sei ein Zufallsvektor $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ mit Ergebnisraum $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ WMF oder WDF p_{ξ_1,ξ_2} und bedingter WMF oder WDF $p_{\xi_1|\xi_2=x_2}$ für alle $x_2 \in \mathcal{X}_2$. Dann ist die *bedingte Varianz von* ξ_1 *gegeben* $\xi_2 = x_2$ definiert als

$$\mathbb{V}(\xi_1|\xi_2 = x_2) = \mathbb{E}\left((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = x_2))^2 \, |\xi_2 = x_2\right) \tag{38}$$

und die *bedingte Standardabweichung von* ξ_1 *gegeben* $\xi_2 = x_2$ ist definiert als

$$\mathbb{S}(\xi_1|\xi_2 = x_2) = \sqrt{\mathbb{V}(\xi_1|\xi_2 = x_2)}. \tag{39}$$

Bemerkungen

- Die bedingte Varianz ist im Sinne des bedingten Erwartungswerts definiert.
- Allgemein ist die bedingte Varianz $\mathbb{V}(\xi_1|\xi_2)$ wie $\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)$ eine Zufallsvariable.
- Auch für die bedingte Varianz gilt der Verschiebungssatz

$$\mathbb{V}(\xi_1|\xi_2) = \mathbb{E}\left(\xi_1^2|\xi_2\right) - \mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)^2 \tag{40}$$

Theorem (Darstellungen von Erwartungswert und Varianz)

Gegeben sei ein Zufallsvektor $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ mit Ergebnisraum $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ WMF oder WDF p_{ξ_1,ξ_2} und bedingter WMF oder WDF $p_{\xi_1|\xi_2=x_2}$ für alle $x_2 \in \mathcal{X}_2$. Dann gelten

(1) (Gesetz des totalen Erwartungswerts)

$$\mathbb{E}(\xi_1) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)\right). \tag{41}$$

(2) (Gesetz der totalen Varianz)

$$\mathbb{V}(\xi_1) = \mathbb{V}\left(\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2)\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{V}(\xi_1|\xi_2)\right). \tag{42}$$

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Das Theorem ist für die Theorie paralleler Testmessungen relevant.

Definition (Bedingte Kovarianz und Korrelation)

Gegeben sei ein Zufallsvektor $\xi := (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ mit Ergebnisraum $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3$ und WMF oder WDF p_{ξ_1,ξ_2,ξ_3} und bedingter WMF oder WDF $p_{\xi_1,\xi_2|\xi_3=x_3}$ für alle $x_3 \in \mathcal{X}_3$. Dann ist die bedingte Kovarianz von x_1 und x_2 gegeben $\xi_3 = x_3$ definiert als

$$\mathbb{C}(\xi_1, \xi_2|\xi_3 = x_3) = \mathbb{E}\left((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1|\xi_3 = x_3))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2|\xi_3 = x_3))|\xi_3 = x_3\right) \tag{43}$$

und die bedingte Korrelation von x_1 und x_2 gegeben $\xi_3 = x_3$ ist definiert als

$$\rho(\xi_1, \xi_2|\xi_3 = x_3) = \frac{\mathbb{C}(\xi_1, \xi_2|\xi_3 = x_3)}{\sqrt{\mathbb{V}(\xi_1|\xi_3 = x_3)}\sqrt{\mathbb{V}(\xi_2|\xi_3 = x_3)}} = \frac{\mathbb{C}(\xi_1, \xi_2|\xi_3 = x_3)}{\mathbb{S}(\xi_1|\xi_3 = x_3\mathbb{S}(\xi_2|\xi_3 = x_3)}. \tag{44}$$

Bemerkungen

- Die bedingte Kovarianz ist im Sinne des bedingten Erwartungswerts des Zufallsvektors (ξ_1, ξ_2) definiert.
- Die bedingte Kovarianz $\mathbb{C}(\xi_1, \xi_2|\xi_3)$ ist im allgemeinen eine Zufallsvariable.
- Die bedingte Korrelation $\rho(\xi_1, \xi_2|\xi_3)$ ist im allgemeinen eine Zufallsvariable.
- Auch für die bedingte Kovarianz gilt der Verschiebungssatz

$$\mathbb{C}(\xi_1, \xi_2|\xi_3) = \mathbb{E}(\xi_1\xi_2|\xi_3) - \mathbb{E}(\xi_1|\xi_3)\,\mathbb{E}(\xi_2|\xi_3). \tag{45}$$

Erwartungswert, Varianz, Kovarianz, Korrelation

Bedingte Erwartungswerte

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie die Definition des Erwartungswerts einer Zufallsvariable wieder.
2. Geben Sie das Theorem zu den Eigenschaften des Erwartungswerts wieder.
3. Geben Sie die Definition von Varianz und Standardabweichung einer Zufallsvariable wieder.
4. Geben Sie das Theorem zu den Eigenschaften der Varianz einer Zufallsvariable wieder
5. Geben Sie die Definition von Kovarianz und Korrelation wieder.
6. Geben Sie das Theorem zu den Eigenschaften der Kovarianz wieder.
7. Geben Sie das Theorem zur Varianz einer Summe von Zufallsvariablen wieder.
8. Geben Sie die Definition des bedingten Erwartungswerts einer Zufallsvariable wieder.

Referenzen

Hautzinger, M, F. Keller, and C. Kühner. 2006. *BDI-II Beck Depressions-Inventar*. Pearson.