Allgemeines Lineares Modell

BSc Psychologie, SoSe 2024

Joram Soch

(10) Einfaktorielle Varianzanalyse

Anwendungsszenario

Modellformulierung

Modellschätzung

Modellevaluation

Selbstkontrollfragen

Anwendungsszenario

Modellformulierung

Modellschätzung

Modellevaluation

Selbstkontrollfragen

Anwendungsszenario

Zwei oder mehr Gruppen (Stichproben) randomisierter experimenteller Einheiten.

Annahme der unabhängigen und identischen Normalverteilung $N(\mu_i, \sigma^2)$ der Daten.

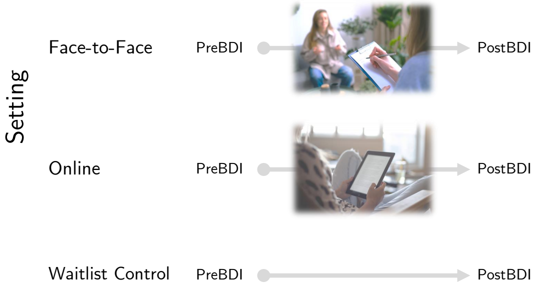
μ_i und σ^2 unbekannt.

Inferentieller Test der Nullhypothese identischer Gruppenerwartungswerte beabsichtigt.

$$\Downarrow$$

Generalisierung des Zweistichproben-T-Tests bei unabhängigen Stichproben mit einfacher Nullhypothese für mehr als zwei Stichproben

Anwendungsbeispiel



Pre-Post-BDI-Differenzwertanalyse für drei Gruppen von Patient:innen (F2F, ONL, WLC):

- inferentielle Evidenz für Gruppenerwartungswertunterschiede?
- empirische Evidenz für unterschiedliche Therapiewirksamkeit?

Anwendungsszenario

Daten einlesen: $j = 1, ...10$ für jede Gruppe

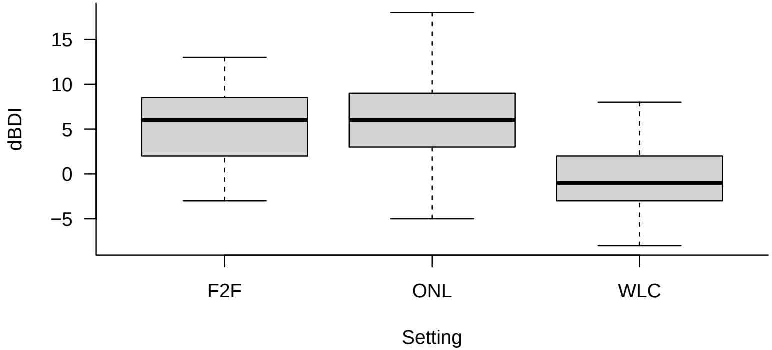
```
fname       = file.path(getwd(), "Daten", "Einfaktorielle_Varianzanalyse_Daten.csv")
D           = read.table(fname, sep = ",", header = TRUE)
```

	ID	Setting	PreBDI	PostBDI	dBDI
1	1	F2F	29	25	4
2	2	F2F	32	31	1
3	3	F2F	28	26	2
4	4	F2F	36	26	10
5	5	F2F	32	27	5
6	6	F2F	28	29	-1
7	7	F2F	33	27	6
8	8	F2F	33	27	6
9	9	F2F	33	25	8
10	10	F2F	30	26	4
41	41	ONL	31	27	4
42	42	ONL	31	25	6
43	43	ONL	34	29	5
44	44	ONL	34	29	5
45	45	ONL	30	24	6
46	46	ONL	30	33	-3
47	47	ONL	33	25	8
48	48	ONL	34	21	13
49	49	ONL	32	26	6
50	50	ONL	35	27	8
81	81	WLC	27	31	-4
82	82	WLC	29	35	-6
83	83	WLC	33	35	-2
84	84	WLC	24	29	-5
85	85	WLC	31	23	8
86	86	WLC	30	38	-8
87	87	WLC	32	32	0
88	88	WLC	28	32	-4
89	89	WLC	30	30	0
90	90	WLC	30	32	-2

Boxplot

```
# Daten einlesen
fname       = file.path(getwd(), "Daten", "Einfaktorielle_Varianzanalyse_Daten.csv")
D           = read.table(fname, sep = ",", header = TRUE)

# Abbildungsparameter
par(                                        # für Details siehe ?par
    family      = "sans",                   # Serif-freier Fonttyp
    pty         = "m",                      # maximale Abbildungsregion
    bty         = "l",                      # L-förmige Box
    lwd         = 1,                        # Liniendicke
    las         = 1,                        # horizontale Achsenbeschriftung
    font.main   = 1,                        # Titel nicht fett
    cex         = 1,                        # Textvergrößerungsfaktor
    cex.main    = 1.2)                      # Titeltextvergrößerungsfaktor

# Boxplot
boxplot(dBDI ~ Setting, data = D)           # BDI ~ Setting enkodiert die Datengruppierung

# PDF-Speicherung
dev.copy2pdf(
    file        = file.path(fdir, "eva_boxplot.pdf"),
    width       = 7,
    height      = 4)
```

Boxplot



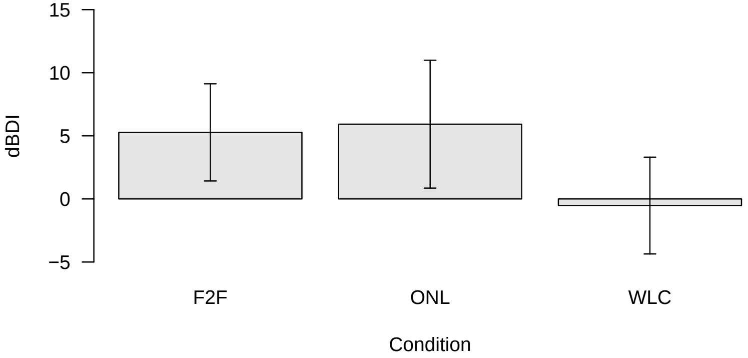
Anwendungsszenario

Balkendiagramm

```
# Daten einlesen
fname       = file.path(getwd(), "Daten", "Einfaktorielle_Varianzanalyse_Daten.csv")
D           = read.table(fname, sep = ",", header = TRUE)

# Datenselektion
A = data.frame(F2F = D$dBDI[D$Setting == "F2F"],    # BDI-Daten für F2F
               ONL = D$dBDI[D$Setting == "ONL"],    # BDI-Daten für ONL
               WLC = D$dBDI[D$Setting == "WLC"])   # BDI-Daten für WLC

# deskriptive Statistiken
groupmeans  = colMeans(A)                          # Gruppenmittelwerte
groupstds   = apply(A,2,sd)                        # Gruppenstandardabweichungen

# Balkendiagramm
par(                                               # für Details siehe ?par
    family      = "sans",                          # Serif-freier Fonttyp
    pty         = "m",                             # maximale Abbildungsregion
    bty         = "l",                             # L-förmige Box
    lwd         = 1,                               # Liniendicke
    las         = 1)                               # horizontale Achsenbeschriftung
x = barplot(groupmeans,                            # Ausgabe der x-Ordinaten
    ylim        = c(-5,15),
    col         = "gray90",
    ylab        = "dBDI",
    xlab        = "Condition")
arrows(
    x0          = x,                               # arrow start x-ordinate
    y0          = groupmeans - groupstds,          # arrow start y-ordinate
    x1          = x,                               # arrow end   x-ordinate
    y1          = groupmeans + groupstds,          # arrow end   y-ordinate
    code        = 3,                               # Pfeilspitzen beiderseits
    angle       = 90,                              # Pfeilspitzenwinkel: Linie
    length      = 0.05)                            # Linielänge

# PDF-Speicherung
dev.copy2pdf(
    file        = file.path(fdir, "eva_barplot.pdf"),
    width       = 7,
    height      = 4)
```

Balkendiagramm

Gruppenmittelwerte $\pm$ Gruppenstandardabweichungen



Anwendungsszenario

Modellformulierung

Modellschätzung

Modellevaluation

Selbstkontrollfragen

Modellformulierung

Definition (EVA-Modell in Erwartungswertparameterdarstellung)

y_{ij} mit $i = 1, ..., p$, welche die Gruppen indizieren, und $j = 1, ..., n_i$, welche die experimentellen Einheiten innerhalb der Gruppen indizieren, seien Zufallsvariablen, die die Datenpunkte eines Einfaktoriellen-Varianzanalyse-Szenarios (EVA) modellieren. Dann hat das *EVA-Modell in Erwartungswertparameterdarstellung* die strukturelle Form

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \text{ mit } \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ u.i.v. für } i = 1, ..., p, j = 1, ..., n_i \text{ mit } \mu_i \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0 \tag{1}$$

und die Datenverteilungsform

$$y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2) \text{ u.v. für } i = 1, ..., p, j = 1, ..., n_i \text{ mit } \mu_i \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0. \tag{2}$$

Wenn $n_i := m$ für alle $i = 1, ..., p$, heißt das EVA-Szenario *balanciert*.

Bemerkungen

- Die Äquivalenz der beiden Modellformulierungen folgt aus den Ergebnissen zu Transformationen der Normalverteilung (vgl. Einheit (7) in *Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz* und Einheit (4) in *Allgemeines Lineares Modell*).
- Es handelt sich um die Generalisierung des Zweistichproben-T-Test-Modells für unabhängige Stichproben unter Annahme identischer Varianzparameter von $p = 2$ auf ein beliebiges $p \in \mathbb{N}$.
- Bei balancierten Varianzanalyseszenarien besteht jede Datengruppe aus der gleichen Anzahl von Datenpunkten.

Modellformulierung

Motivation der Effektdarstellung

Die Erwartungswertparameterdarstellung des EVA Modells ist ein valides ALM, das sich in dieser Form auch in der Literatur findet (z.B. Georgii (2009), Kapitel 12.4). Im Sinne der Konsistenz mit mehrfaktoriellen Varianzanalysemodellen bietet sich jedoch eine Reparameterisierung der Erwartungswertparameter an. Kern dieser Reparameterisierung ist es, den Erwartungswertparameter der $i$ten Gruppe als Summe eines *gruppenübergreifenden Erwartungswertparameters* $\mu_0 \in \mathbb{R}$ und eines *gruppenspezifischen Effektparameters* $\alpha_i \in \mathbb{R}$ zu modellieren,

$$\mu_i := \mu_0 + \alpha_i \text{ für } i = 1, ..., p. \tag{3}$$

Dabei modelliert α_i den Unterschied (die Differenz) zwischen dem $i$ten Erwartungswertparameter μ_i und dem gruppenübergreifenden Erwartungswertparameter μ_0,

$$\alpha_i = \mu_i - \mu_0 \text{ für } i = 1, ..., p. \tag{4}$$

Allerdings hat die in dieser Form vorgenommene Reparameterisierung einen entscheidenen Nachteil: es werden p Erwartungswertparameter $\mu_i, i = 1, ..., p$ durch die $p + 1$ Parameter μ_0 und $\alpha_i, i = 1, ..., p$ dargestellt. Diese Darstellung ist im Allgemeinen nicht eindeutig. Zum Beispiel können die Erwartungswertparameter

$$\mu_1 = 3, \mu_2 = 5, \mu_3 = 6 \tag{5}$$

sowohl durch

$$\mu_0 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_1 = 3, \alpha_2 = 5, \alpha_3 = 6 \tag{6}$$

als auch durch

$$\mu_0 = 1 \quad \text{und} \quad \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = 5 \tag{7}$$

dargestellt werden. Man sagt in diesem Kontext auch, dass das EVA-Modell mit (3) *überparameterisiert* ist.

Modellformulierung

Motivation der Effektdarstellung

Datenanalytisch hat die Überparameterisierung eines Varianzanalysemodells den Nachteil, dass aus p geschätzten Erwartungswertparametern $p+1$ Betaparameterschätzer bestimmt werden müssten, was wie gesehen nicht eindeutig erfolgen kann. Um diese Probleme in der Effektparameterdarstellung des EVA-Modells zu umgehen und sie konsistent auf mehrfaktorielle Varianzanalysemodelle zu übertragen, bietet sich die Einführung einer Nebenbedingung an:

$$\alpha_1 := 0\,. \tag{8}$$

Es wird also ein Effektparameter von vornherein als "gleich Null" angenommen. Für die gruppenspezifischen Erwartungswertparameter ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \mu_1 &:= \mu_0 \\ \mu_i &:= \mu_0 + \alpha_i \text{ für } i = 2, ..., p. \end{aligned} \tag{9}$$

Hierbei wird die erste Gruppe nun als *Referenzgruppe* bezeichnet und die α_i modellieren die Differenz zwischen dem Erwartungswertparameter der $i$ten Gruppe und dem Erwartungswertparameter der ersten Gruppe:

$$\alpha_i = \mu_i - \mu_0 = \mu_i - \mu_1 \text{ für } i = 1, ..., p. \tag{10}$$

μ_0 ist also kein gruppenübergreifender Erwartungswertparameter mehr, sondern identisch mit dem Erwartungswertparameter der ersten Gruppe. Welche tatsächliche experimentelle Gruppe dabei als "erste Gruppe" definiert wird, ist unerheblich. Entscheidend ist, dass die entsprechenden Erwartungswertparameterschätzer $\hat{\mu}_0$,$\hat{\alpha}_2, ..., \hat{\alpha}_p$ korrekt als (1) Erwartungswertparameterschätzer der Referenzgruppe ($\hat{\mu}_0$) und (2) geschätzte Differenz zwischen dem Erwartungswertparameter der Referenzgruppe und dem Erwartungswertparameter der $i$ten Gruppe ($\hat{\alpha}_2, ..., \hat{\alpha}_p$) verstanden werden. Wir formalisieren das oben Gesagte in folgendem Theorem.

Modellformulierung

Theorem (EVA-Modell in Effektdarstellung mit Referenzgruppe I)

Gegeben sei das EVA-Modell in Erwartungswertparameterdarstellung. Dann können die Zufallsvariablen, die die Datenpunkte des EVA-Szenarios modellieren, äquivalent in der strukturellen Form

$$\begin{aligned} y_{1j} &= \mu_0 + \varepsilon_{1j} \quad \text{mit } \varepsilon_{1j} \sim N(0,\sigma^2) \text{ u.i.v. für } j = 1,...,n_1 \\ y_{ij} &= \mu_0 + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \text{ mit } \varepsilon_{ij} \sim N(0,\sigma^2) \text{ u.i.v. für } i = 2,...,p, j = 1,...,n_i \end{aligned} \tag{11}$$

mit $\alpha_i := \mu_i - \mu_1$ für $i = 2, ..., p$ und in der entsprechenden Datenverteilungsform

$$\begin{aligned} y_{1j} &\sim N(\mu_0,\sigma^2) \quad \text{u.i.v. für } j = 1,...,n_i \text{ mit } \mu_0 \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0 \\ y_{ij} &\sim N(\mu_0 + \alpha_i,\sigma^2) \text{ u.v. für } i = 2,...,p, j = 1,...,n_i \text{ mit } \alpha_i \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0 \end{aligned} \tag{12}$$

geschrieben werden. Wir nennen (11) und (12) die strukturelle und die Datenverteilungsform des *EVA-Modells in Effektdarstellung mit Referenzgruppe*.

Beweis

Es gilt

$$\mu_i = \mu_0 + \mu_i - \mu_0 \ . \tag{13}$$

Die Parameterisierungen mit μ_i und mit $\mu_0 + \mu_i - \mu_0$ sind also gleich und damit äquivalent. Dann folgt aber auch

$$\mu_i = \mu_0 + (\mu_i - \mu_0) =: \mu_0 + \alpha_i \text{ für } i = 1, ..., p \ . \tag{14}$$

Mit $\alpha_1 := 0$ gilt dann $\mu_1 = \mu_0$ und $\mu_i = \mu_0 + \alpha_i$ für $i = 2, ..., p$, wie im Theorem behauptet. □

Theorem (EVA-Modell in Effektdarstellung mit Referenzgruppe II)

Gegeben sei die strukturelle Form des EVA-Modells in Effektdarstellung mit Referenzgruppe. Dann hat dieses Modell die Designmatrixform

$$y = X\beta + \varepsilon \text{ mit } \varepsilon \sim N(0_n, \sigma^2 I_n), n := \sum_{i=1}^{p} n_i \tag{15}$$

$$y := \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2n_2} \\ \\ \vdots \\ \\ y_{p1} \\ \vdots \\ y_{pn_p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad X := \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & & 0 \\ \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \\ 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad \beta := \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \quad \text{und} \quad \sigma^2 > 0.$$

<u>Beweis</u>

Das Theorem ergibt sich direkt mit den Regeln der Matrixmultiplikation. $\square$

Modellformulierung

Beispiel

Es seien

$$p = 4 \text{ und } n_i := 3 \text{ für } i = 1, ..., p, \text{ also } n = 12. \tag{16}$$

Dann gilt

$$y = X\beta + \varepsilon \text{ mit } \varepsilon \sim N(0_{12}, \sigma^2 I_{12}) \tag{17}$$

mit

$$y := \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \\ y_{31} \\ y_{32} \\ y_{33} \\ y_{41} \\ y_{42} \\ y_{43} \end{pmatrix}, \quad X := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 4}, \quad \beta := \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \text{und} \quad \sigma^2 > 0. \tag{18}$$

Beispiel

```
# Modellformulierung
library(MASS)                                                       # multivariate Normalverteilung
m      = 3                                                          # Anzahl Datenpunkte i-te Gruppe
p      = 4                                                          # Anzahl Gruppen
n      = p*m                                                        # Gesamtanzahl Datenpunkte
Xt     = cbind(matrix(1, nrow = n, ncol = 1),                       # n x p Designmatrix
               kronecker(diag(p), matrix(1, nrow = m, ncol = 1)))
X      = Xt[,-2]                                                    # eliminiere zweite Spalte
I_n    = diag(n)                                                    # n x n Einheitsmatrix
beta   = matrix(c(1,2), nrow = p)                                   # \beta = (\mu_0,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)^T
sigsqr = 14                                                         # \sigma^2

# Datenrealisierung
y      = mvrnorm(1, X %*% beta, sigsqr*I_n)                         # eine Realisierung des n-dimensionalen ZVs y
```

```
>       [,1] [,2] [,3] [,4]
>  [1,]    1    0    0    0
>  [2,]    1    0    0    0
>  [3,]    1    0    0    0
>  [4,]    1    1    0    0
>  [5,]    1    1    0    0
>  [6,]    1    1    0    0
>  [7,]    1    0    1    0
>  [8,]    1    0    1    0
>  [9,]    1    0    1    0
> [10,]    1    0    0    1
> [11,]    1    0    0    1
> [12,]    1    0    0    1
```

Anwendungsszenario

Modellformulierung

Modellschätzung

Modellevaluation

Selbstkontrollfragen

Modellschätzung

Theorem (Betaparameterschätzer im EVA-Modell)

Gegeben sei die Designmatrixform der EVA in Effektdarstellung mit Referenzgruppe. Dann ergibt sich für den Betaparameterschätzer

$$\hat{\beta} := \begin{pmatrix} \hat{\mu}_0 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_p - \bar{y}_1 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

wobei

$$\bar{y}_i := \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \tag{20}$$

das Stichprobenmittel der $i$ten Gruppe bezeichent.

Bemerkungen

- Der Erwartungswertparameter der ersten Gruppe wird durch das Stichprobenmittel der ersten Gruppe geschätzt; der Effektparameter der $i$ten Gruppe wird durch die Differenz des Stichprobenmittels der $i$ten und der ersten Gruppe geschätzt.

Beweis

Wir halten zunächst fest, dass

$$
X^{\mathrm{T}}X = \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
 & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
1 & 0 & & 0 \\
1 & 1 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
1 & 1 & & 0 \\
 & & & \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 & & & \\
1 & 0 & & 1 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
1 & 0 & & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
n & n_2 & n_3 & \cdots & n_p \\
n_2 & n_2 & 0 & \cdots & 0 \\
n_3 & 0 & n_3 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
n_p & 0 & 0 & \cdots & n_p
\end{pmatrix}.
$$

Beweis (fortgeführt)

Die Inverse von $X^{\mathrm{T}}X$ ist

$$(X^{\mathrm{T}}X)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1} & -\frac{1}{n_1} & \cdots & -\frac{1}{n_1} \\ -\frac{1}{n_1} & \frac{n_1+n_2}{n_1 n_2} & \cdots & \frac{1}{n_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n_1} & \frac{1}{n_1} & \cdots & \frac{n_1+n_p}{n_1 n_p} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

So gilt zum Beispiel für $p = 3$, dass

$$X^{\mathrm{T}}X = \begin{pmatrix} n & n_2 & n_3 \\ n_2 & n_2 & 0 \\ n_3 & 0 & n_3 \end{pmatrix} \text{ und } (X^{\mathrm{T}}X)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1} & -\frac{1}{n_1} & -\frac{1}{n_1} \\ -\frac{1}{n_1} & \frac{n_1+n_2}{n_1 n_2} & \frac{1}{n_1} \\ -\frac{1}{n_1} & \frac{1}{n_1} & \frac{n_1+n_3}{n_1 n_3} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Modellschätzung

Beweis (fortgeführt)

Wir halten weiterhin fest, dass

$$
X^{\mathrm{T}} y = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2n_2} \\ \vdots \\ y_{p1} \\ \vdots \\ y_{pn_p} \end{pmatrix} \tag{23}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n_p} y_{pj} \end{pmatrix}.
$$

Modellschätzung

Beweis (fortgeführt)

Es ergibt sich also

$$
\hat{\beta} = (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}y = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1} & -\frac{1}{n_1} & \cdots & -\frac{1}{n_1} \\ -\frac{1}{n_1} & \frac{n_1+n_2}{n_1 n_2} & \cdots & \frac{1}{n_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n_1} & \frac{1}{n_1} & \cdots & \frac{n_1+n_p}{n_1 n_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n_p} y_{pj} \end{pmatrix}. \tag{24}
$$

Für die erste Komponente von $\hat{\beta}$ ergibt sich damit

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_1 &= \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} - \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} - \cdots - \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_p} y_{pj} \\
&= \frac{1}{n_1}\left(\left(\sum_{j=1}^{n_1} y_{1j} + \sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n_p} y_{pj}\right) - \sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} - \cdots - \sum_{j=1}^{n_p} y_{pj}\right) \\
&= \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} y_{1j} \\
&= \bar{y}_1.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Beweis (fortgeführt)

Für die zweite Komponente von $\hat{\beta}$ und analog für alle weiteren ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_2 &= -\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} + \frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}\sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} + \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_3} y_{3j} + \cdots + \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_p} y_{pj} \\
&= \frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}\sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} - \frac{1}{n_1}\left(\left(\sum_{j=1}^{n_1} y_{1j} + \sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n_p} y_{pj}\right) - \sum_{j=1}^{n_3} y_{3j} - \cdots - \sum_{j=1}^{n_p} y_{pj}\right) \\
&= \frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}\sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} - \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} y_{1j} - \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} \\
&= \frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}\sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} - \frac{n_2}{n_1 n_2}\sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} - \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} y_{1j} \\
&= \frac{n_1}{n_1 n_2}\sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} - \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} y_{1j} \\
&= \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} - \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} y_{1j} = \bar{y}_2 - \bar{y}_1 .
\end{aligned}
\tag{26}
$$

□

Theorem (Varianzparameterschätzer im EVA-Modell)

Gegeben sei die Designmatrixform der EVA in Effektdarstellung mit Referenzgruppe. Dann ergibt sich für den Varianzparameterschätzer

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{p} n_i - p} =: s_{1...p}^2 \tag{27}$$

wobei

$$\bar{y}_i := \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \tag{28}$$

das Stichprobenmittel der $i$ten Gruppe bezeichnet.

Bemerkungen

- Der Varianzparameterschätzer ergibt sich wiederum als gebündelte Stichprobenvarianz, generalisiert auf eine beliebige Anzahl von Gruppen p. Wir erinnern daran, dass die gebündelte Stichprobenvarianz $s_{1...p}^2$ im Allgemeinen nicht der Stichprobenvarianz des Datenvektors s_y^2 entspricht.

Modellschätzung

Beweis

Der Varianzparameterschätzer ist gegeben durch

$$
\hat{\sigma}^2 = \frac{(y - X\hat{\beta})^{\mathrm{T}}(y - X\hat{\beta})}{n-p}
$$

$$
= \frac{1}{n-p}\left(\begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2n_2} \\ \\ \vdots \\ \\ y_{p1} \\ \vdots \\ y_{pn_p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & & 0 \\ \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \\ 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_p - \bar{y}_1 \end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}} \left(\begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2n_2} \\ \\ \vdots \\ \\ y_{p1} \\ \vdots \\ y_{pn_p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & & 0 \\ \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \\ 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_p - \bar{y}_1 \end{pmatrix}\right) \tag{29}
$$

Beweis (fortgeführt)

Es ergibt sich also

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n_1 + ... + n_p - p}
\begin{pmatrix}
y_{11} - \bar{y}_1 \\
\vdots \\
y_{1n_1} - \bar{y}_1 \\
y_{21} - \bar{y}_1 - (\bar{y}_2 - \bar{y}_1) \\
\vdots \\
y_{2n_2} - \bar{y}_1 - (\bar{y}_2 - \bar{y}_1) \\
\\
\vdots \\
\\
y_{p1} - \bar{y}_1 - (\bar{y}_p - \bar{y}_1) \\
\vdots \\
y_{pn_p} - \bar{y}_1 - (\bar{y}_p - \bar{y}_1)
\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}
\begin{pmatrix}
y_{11} - \bar{y}_1 \\
\vdots \\
y_{1n_1} - \bar{y}_1 \\
y_{21} - \bar{y}_1 - (\bar{y}_2 - \bar{y}_1) \\
\vdots \\
y_{2n_2} - \bar{y}_1 - (\bar{y}_2 - \bar{y}_1) \\
\\
\vdots \\
\\
y_{p1} - \bar{y}_1 - (\bar{y}_p - \bar{y}_1) \\
\vdots \\
y_{pn_p} - \bar{y}_1 - (\bar{y}_p - \bar{y}_1)
\end{pmatrix} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{n_1}(y_{1j} - \bar{y}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(y_{2j} - \bar{y}_2)^2 + ... + \sum_{j=1}^{n_p}(y_{pj} - \bar{y}_p)^2}{n_1 + ... + n_p - p} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{p} n_i - p} \\
&=: s_{1...p}^2 .
\end{aligned}
\tag{30}
$$

$\square$

Modellschätzung

```r
# Daten einlesen
fname      = file.path(getwd(), "Daten", "Einfaktorielle_Varianzanalyse_Daten.csv")
D          = read.table(fname, sep = ",", header = TRUE)

# Datengruppen
y_1        = D$dBDI[D$Setting == "F2F"]                        # BDI-Differenzwerte in der F2F-Gruppe
y_2        = D$dBDI[D$Setting == "ONL"]                        # BDI-Differenzwerte in der ONL-Gruppe
y_3        = D$dBDI[D$Setting == "WLC"]                        # BDI-Differenzwerte in der ONL-Gruppe

# Modellformulierung
p          = 3                                                 # drei Gruppen
m          = length(y_1)                                       # balancierters Design mit n_i = 40
n          = p*m                                               # Datenvektordimension
y          = matrix(c(y_1, y_2, y_3), nrow = n)                # Datenvektor
Xt         = cbind(matrix(1, nrow = n, ncol = 1),              # Designmatrix
                   kronecker(diag(p), matrix(1, nrow = m, ncol = 1)))
X          = Xt[,-2]                                           # eliminiere zweite Spalte

# Modellschätzung
beta_hat   = solve(t(X) %*% X) %*% t(X) %*% y                  # Betaparameterschätzer
eps_hat    = y - X %*% beta_hat                                # Residuenvektor
sigsqr_hat = (t(eps_hat) %*% eps_hat) /(n-p)                   # Varianzparameterschätzer
s_sqr_123  = ((m-1)*var(y_1) +                                 # gebündelte Stichprobenvarianz
              (m-1)*var(y_2) +
              (m-1)*var(y_3))/(m+m+m-p)

# Ausgabe
cat(  "hat{beta}                                   : ", beta_hat,
    "\nbar{y}_1,bar{y}_2,bar{y}_3                  : ", c(mean(y_1),mean(y_2),mean(y_3)),
    "\nbar{y}_1,bar{y}_2-bar{y}_1,bar{y}_3-bar{y}_1 : ", c(mean(y_1),mean(y_2)-mean(y_1),mean(y_3)-mean(y_1)),
    "\nhat{sigsqr}                                 : ", sigsqr_hat,
    "\ns_123^2                                     : ", s_sqr_123,
    "\ns_y^2                                       : ", var(y))
```

```
> hat{beta}                                  :  5.28 0.65 -5.8
> bar{y}_1,bar{y}_2,bar{y}_3                 :  5.28 5.92 -0.525
> bar{y}_1,bar{y}_2-bar{y}_1,bar{y}_3-bar{y}_1 :  5.28 0.65 -5.8
> hat{sigsqr}                                :  18.4
> s_123^2                                    :  18.4
> s_y^2                                      :  26.6
```

Modellevaluation

Vorbemerkungen und Überblick

Prinzipiell sind alle Parameterschätzwerte in einem EVA-Modell von Interesse. Mit der T-Teststatistik können einzelne Komponenten oder lineare Kombinationen der Betaparameterschätzwerte im Sinne von Hypothesentests evaluiert werden.

Nichtsdestotrotz steht im EVA-Szenario häufig die Evaluation der Nullhypothese, dass alle Effektparameter gleich Null sind, im Vordergrund. Intuitiv besagt diese Nullhypothese, dass die wahren, aber unbekannten Erwartungswertparameter aller Gruppen identisch sind, formal haben wir

$$H_0 : \alpha_i = 0 \text{ für alle } i = 2, ..., p \tag{31}$$

und

$$H_1 : \alpha_i \neq 0 \text{ für mindestens ein } i = 2, ..., p \tag{32}$$

Zur Überprüfung von H_0 wird im Allgemeinen eine F-Teststatistik eingesetzt. Dabei wird das volle Modell mit dem reduzierten Modell verglichen, in der die Designmatrix nur die erste Spalte der Designmatrix des vollen Modells enthält.

Im Folgenden entwickeln wir zunächst diese F-Teststatistik anhand einer *Quadratsummenzerlegung* der Datenvariabilität in einem EVA-Szenario und betrachten in diesem Zusammenhang auch das dem R^2 analoge Effektstärkemaß η^2. Ausgestattet mit der speziellen Form der F-Teststatistik in dem hier betrachteten Szenario diskutieren wir dann den traditionellen EVA-Hypothesentest. Wir verzichten auf eine Analyse der Testgütefunktion und eine Diskussion der Powerfunktion.

Theorem (Quadratsummenzerlegung bei einfaktorieller Varianzanalyse)

Für $i = 1, ..., p$ und $j = 1, ..., n_i$ sei y_{ij} die $j$te Datenvariable in der $i$ten Gruppe eines EVA-Szenarios. Weiterhin seien mit $n := \sum_{i=1}^{p} n_i$

$\bar{y} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$ das *Gesamtstichprobenmittel*

$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$ das i*te Stichprobenmittel*

sowie

$\mathrm{SQT} := \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2$ die *total sum of squares*

$\mathrm{SQB} := \sum_{i=1}^{p} n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2$ die *"between" sum of squares*

$\mathrm{SQW} := \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$ die *"within" sum of squares* .

Dann gilt

$$\mathrm{SQT} = \mathrm{SQB} + \mathrm{SQW}. \tag{33}$$

Bemerkungen

- Im Vergleich mit der Quadratsummenzerlegung mit Ausgleichsgerade (vgl. Einheit (2) in *Allgemeines Lineares Modell*) spielt SQB die Rolle der erklärten Quadratsumme und SQW die Rolle der residuellen Quadratsumme.
- Die Ausdrücke "between" und "within" beziehen sich hierbei darauf, dass SQB die Variabilität zwischen den Gruppen und SQW die Variabilität innerhalb der Gruppen abbildet.

Beweis

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\mathsf{SQT} &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i+\bar{y}_i-\bar{y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}\big((y_{ij}-\bar{y}_i)+(\bar{y}_i-\bar{y})\big)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}\big((y_{ij}-\bar{y}_i)^2+2(y_{ij}-\bar{y}_i)(\bar{y}_i-\bar{y})+(\bar{y}_i-\bar{y})^2\big) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2+\sum_{j=1}^{n_i}2(y_{ij}-\bar{y}_i)(\bar{y}_i-\bar{y})+\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{y}_i-\bar{y})^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2+2(\bar{y}_i-\bar{y})\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)+n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2+2(\bar{y}_i-\bar{y})\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij}-\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}y_{ij}\right)+n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2\right)
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Beweis (fortgeführt)

und weiter

$$
\begin{aligned}
\mathsf{SQT} &= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2 + 2(\bar{y}_i-\bar{y})\left(\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} - \sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right)\right) + n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2 + 2(\bar{y}_i-\bar{y})\left(\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} - \frac{n_i}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right) + n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2 + 2(\bar{y}_i-\bar{y})\left(\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} - \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right) + n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2 + n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{p} n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\mathsf{SQT} = \mathsf{SQB} + \mathsf{SQW}. \tag{35}
$$

□

Definition (Effektstärkenmaß η^2)

Für ein EVA-Szenario seien die *between sum of squares* SQB und die *total sum of squares* SQT definiert wie oben. Dann ist das *Effektstärkenmaß* η^2 definiert als

$$\eta^2 := \frac{\mathsf{SQB}}{\mathsf{SQT}} \tag{36}$$

Bemerkungen

- η^2 ist analog zum Bestimmtheitsmaß R^2 der Regression definiert.
- η^2 gibt den Anteil der Varianz zwischen den Gruppen an der Gesamtvarianz der Daten an.
- Mit dem Theorem zur Quadratsummenzerlegung bei EVA folgt sofort $0 \le \eta^2 \le 1$, da

$$\begin{aligned} \mathsf{SQB} = 0 \Rightarrow \mathsf{SQT} = \mathsf{SQW} \text{ und } \eta^2 = 0 \\ \mathsf{SQW} = 0 \Rightarrow \mathsf{SQT} = \mathsf{SQB} \text{ und } \eta^2 = 1\ . \end{aligned} \tag{37}$$

Theorem (F-Teststatistik der einfaktoriellen Varianzanalyse)

Es sei

$$y = X\beta + \varepsilon \text{ mit } \varepsilon \sim N(0_n, \sigma^2 I_n) \tag{38}$$

die Designmatrixform der Effektdarstellung mit Referenzgruppe des EVA-Modells und im Sinne der Definition der F-Statistik sei dieses Modell partioniert mit $p_0 := 1$ und $p_1 := p - 1$. Weiterhin seien

$$\mathsf{MSB} := \frac{\mathsf{SQB}}{p-1} \qquad \text{die } \textit{mean between sum of squares} \text{ und}$$

$$\mathsf{MSW} := \frac{\mathsf{SQW}}{n-p} \qquad \text{die } \textit{mean within sum of squares}$$

Dann gilt

$$F = \frac{\mathsf{MSB}}{\mathsf{MSW}}. \tag{39}$$

Bemerkungen

- $p_0 := 1$ impliziert, dass das reduzierte Modell die Designmatrix $X_0 := 1_n$ hat.
- $p_0 := 1$ impliziert zudem, dass das reduzierte Modell den Betaparameter $\beta_0 := \mu_0$ hat.
- $p_0 := 1$ impliziert damit auch, dass das reduzierte Modell keine Effektparameter α_i für $i = 2, ..., p$ hat.
- Die Zahl $p - 1$ wird auch als "Zähler-Freiheitsgrade" bezeichnet.
- Die Zahl $n - p$ wird auch als "Nenner-Freiheitsgrade" bezeichnet.

Beweis

Wir halten zunächst fest, dass für den Betaparameterschätzer des reduzierten Modells gilt, dass

$$\hat{\beta}_0 = (X_0^{\mathrm{T}} X_0)^{-1} X_0^{\mathrm{T}} y = (1_n^{\mathrm{T}} 1_n)^{-1} 1_n^{\mathrm{T}} y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \bar{y}. \tag{40}$$

Weiterhin ergibt sich

$$\hat{\varepsilon}_0^{\mathrm{T}} \hat{\varepsilon}_0 = (y - X_0 \hat{\beta}_0)^{\mathrm{T}} (y - X_0 \hat{\beta}_0) = (y - 1_n \bar{y})^{\mathrm{T}} (y - 1_n \bar{y}) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2 = \mathsf{SQT}. \tag{41}$$

Der Betaparameterschätzer des vollständigen Modells ergibt sich wie oben gesehen zu

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_0 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} y_{1j} \\ \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} - \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} y_{1j} \\ \vdots \\ \frac{1}{n_m} \sum_{j=1}^{n_m} y_{mj} - \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} y_{1j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_p - \bar{y}_1 \end{pmatrix}, \tag{42}$$

sodass

Beweis (fortgeführt)

$$
\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\hat{\varepsilon} &= (y - X\hat{\beta})^{\mathrm{T}}(y - X\hat{\beta}) \\
&= \left(\begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2n_2} \\ \vdots \\ y_{p1} \\ \vdots \\ y_{pn_p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_p - \bar{y}_1 \end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}} (y - X\hat{\beta})
\end{aligned}
$$

Modellevaluation

Beweis (fortgeführt)

und weiter

$$
\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\hat{\varepsilon} &=
\begin{pmatrix}
y_{11} - \bar{y}_1 \\ \vdots \\ y_{1n_1} - \bar{y}_1 \\ y_{21} - \bar{y}_1 - \bar{y}_2 + \bar{y}_1 \\ \vdots \\ y_{2n_2} - \bar{y}_1 - \bar{y}_2 + \bar{y}_1 \\ \vdots \\ y_{p1} - \bar{y}_1 - \bar{y}_p + \bar{y}_1 \\ \vdots \\ y_{pn_p} - \bar{y}_1 - \bar{y}_p + \bar{y}_1
\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}
\begin{pmatrix}
y_{11} - \bar{y}_1 \\ \vdots \\ y_{1n_1} - \bar{y}_1 \\ y_{21} - \bar{y}_1 - \bar{y}_2 + \bar{y}_1 \\ \vdots \\ y_{2n_2} - \bar{y}_1 - \bar{y}_2 + \bar{y}_1 \\ \vdots \\ y_{p1} - \bar{y}_1 - \bar{y}_p + \bar{y}_1 \\ \vdots \\ y_{pn_p} - \bar{y}_1 - \bar{y}_p + \bar{y}_1
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
y_{11} - \bar{y}_1 \\ \vdots \\ y_{1n_1} - \bar{y}_1 \\ y_{21} - \bar{y}_2 \\ \vdots \\ y_{2n_2} - \bar{y}_2 \\ \vdots \\ y_{p1} - \bar{y}_p \\ \vdots \\ y_{pn_p} - \bar{y}_p
\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}
\begin{pmatrix}
y_{11} - \bar{y}_1 \\ \vdots \\ y_{1n_1} - \bar{y}_1 \\ y_{21} - \bar{y}_2 \\ \vdots \\ y_{2n_2} - \bar{y}_2 \\ \vdots \\ y_{p1} - \bar{y}_p \\ \vdots \\ y_{pn_p} - \bar{y}_p
\end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \\
&= \text{SQW}.
\end{aligned}
$$

Beweis (fortgeführt)

Mit dem Theorem zur Quadratsummenzerlegung bei einfaktorieller Varianzanalyse

$$\mathsf{SQT} = \mathsf{SQB} + \mathsf{SQW} \Leftrightarrow \mathsf{SQB} = \mathsf{SQT} - \mathsf{SQW} \tag{43}$$

folgt sofort, dass

$$\begin{aligned} \mathsf{SQB} &= \mathsf{SQT} - \mathsf{SQW} \\ &= \hat{\varepsilon}_0^{\mathrm{T}} \hat{\varepsilon}_0 - \hat{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \hat{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{44}$$

Dann aber folgt auch direkt, dass

$$\frac{\mathsf{MSB}}{\mathsf{MSW}} = \frac{\frac{\mathsf{SQB}}{p-1}}{\frac{\mathsf{SQW}}{n-p}} = \frac{\frac{\hat{\varepsilon}_0^{\mathrm{T}} \hat{\varepsilon}_0 - \hat{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \hat{\varepsilon}}{p-1}}{\frac{\hat{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \hat{\varepsilon}}{n-p}} = F \tag{45}$$

Theorem (Effektstärkenmaß η^2 und F-Teststatistik)

Für ein EVA-Szenario mit p Gruppen und Gesamtdatenpunktanzahl n seien das Effektstärkenmaß η^2 und die F-Teststatistik wie oben definiert. Dann gilt

$$\eta^2 = \frac{F(p-1)}{F(p-1) + (n-p)} \tag{46}$$

Bemerkungen

- Das Verhältnis von F und η^2 ist Analog zum Verhältnis von T und Cohen's d.
- Die gleichzeitige Angabe von F und η^2 ist redundant.

<u>Beweis</u>

Wir halten zunächst fest, dass

$$F = \frac{\mathsf{SQB}}{\mathsf{SQW}} \cdot \frac{n-p}{p-1} \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{SQB} = \frac{p-1}{n-p} \cdot \mathsf{SQW} \cdot F \,. \tag{47}$$

Damit folgt dann

$$\begin{aligned}
\eta^2 = \frac{\mathsf{SQB}}{\mathsf{SQT}} = \frac{\mathsf{SQB}}{\mathsf{SQB} + \mathsf{SQW}} &= \frac{\frac{p-1}{n-p} \cdot \mathsf{SQW} \cdot F}{\frac{p-1}{n-p} \cdot \mathsf{SQW} \cdot F + \mathsf{SQW}} \\
&= \frac{\frac{F(p-1)}{n-p} \cdot \mathsf{SQW}}{\frac{F(p-1)}{n-p} \cdot \mathsf{SQW} + \mathsf{SQW}} = \frac{\frac{F(p-1)}{n-p} \cdot \mathsf{SQW}}{\left(\frac{F(p-1)}{n-p} + 1\right) \cdot \mathsf{SQW}} \\
&= \frac{\frac{F(p-1)}{n-p}}{\frac{F(p-1)}{n-p} + \frac{n-p}{n-p}} = \frac{\frac{F(p-1)}{n-p}}{\frac{F(p-1)+(n-p)}{n-p}} = \frac{F(p-1)}{F(p-1) + (n-p)} \,.
\end{aligned} \tag{48}$$

$\square$

Gliederung (vgl. Einheit (11) in *Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz*)

(1) Statistisches Modell ✓

(2) Testhypothesen ✓

(3) Teststatistik ✓

(4) Test

(5) Testumfangkontrolle

(6) p-Wert

Bezeichnungskonventionen für f-Zufallsvariablen

- Für eine (nichtzentrale) f-Zufallsvariable ξ schreiben wir $\xi \sim f(n_1, n_2)$ (oder $\xi \sim f(\delta, n_1, n_2)$).
- Die WDF einer (nichtzentralen) f-Zufallsvariable ist $f(\cdot; n_1, n_2)$ (oder $f(\cdot; \delta, n_1, n_2)$).
- Die KVF einer (nichtzentralen) f-Zufallsvariable ist $\varphi(\cdot; n_1, n_2)$ (oder $\varphi(\cdot; \delta, n_1, n_2)$).
- Die Teststatistik eines F-Test-Designs/Hypothesentests bezeichnen wir mit F.
- Die Realisierung der F-Teststatistik für einen Datensatz bezeichnen wir mit f.

Definition (F-Test für einfaktorielle Varianzanalyse)

Gegeben sie das Modell der einfaktoriellen Varianzanalyse sowie die zusammengesetzten Null- und Alternativhypothesen

$$H_0 : \alpha_i = 0 \text{ für alle } i = 2, ..., p \tag{49}$$

bzw.

$$H_1 : \alpha_i \neq 0 \text{ für mindestens ein } i = 2, ..., p\ . \tag{50}$$

Weiterhin sei die F-Teststatistik definiert durch

$$F = \frac{\mathsf{MSB}}{\mathsf{MSW}} \tag{51}$$

mit der mean between sum of squares MSB und der mean within sum of squares MSW. Dann ist der *F-Test für die einfaktoriellen Varianzanalyse (EVA-F-Test)* definiert als der kritische Wert-basierte Test

$$\phi(y) := 1_{\{F \geq k\}} := \begin{cases} 1 & F \geq k \\ 0 & F < k \end{cases}. \tag{52}$$

Theorem (Testumfangkontrolle)

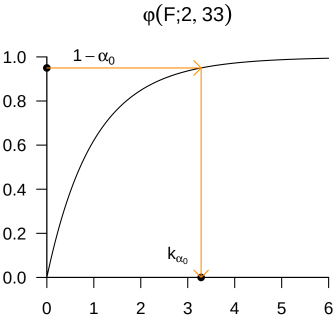
ϕ sei der F-Test zur einfaktoriellen Varianzanalyse. Dann ist ϕ ein Level-α_0-Test mit Testumfang α_0, wenn der kritische Wert definiert ist durch

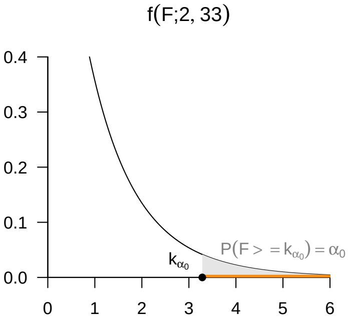
$$k_{\alpha_0} := \varphi^{-1}(1 - \alpha_0; p - 1, n - p), \qquad (53)$$

wobei $\varphi^{-1}(\cdot; p - 1, n - p)$ die inverse KVF der f-Verteilung mit Freiheitsgradparametern $p - 1$ und $n - p$ ist.

Modellevaluation (5) Testumfangkontrolle

Wahl von $k_{\alpha_0} := \varphi^{-1}(1-\alpha_0; p-1, n-p)$ mit $p = 3, m = 12, \alpha_0 := 0.05$ und Ablehnungsbereich





Modellevaluation (5) Testumfangkontrolle

Beweis

Die Testgütefunktion des betrachteten Tests im vorliegenden Testszenario ist definiert als

$$q : \mathbb{R}^p \to [0,1], \beta \mapsto q_\phi(\beta) := \mathbb{P}_\beta(\phi = 1). \tag{54}$$

Wir haben bereits gesehen (siehe Einheit (8) in *Allgemeines Lineares Modell*), dass die F-Teststatistik für $p_1 = p-1$ nach einer nichtzentralen f-Verteilung verteilt ist,

$$F \sim f(\delta, p-1, n-p). \tag{55}$$

Weiterhin ist der Ablehnungsbereich des hier betrachteten Tests gegeben als $[k, \infty[$. Für die funktionale Form der Testgütefunktion ergibt sich also

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\beta(\phi = 1) &= \mathbb{P}_\beta(F \in [k, \infty[) \\
&= \mathbb{P}_\beta(F \ge k) \\
&= 1 - \mathbb{P}_\beta(F \le k) \\
&= 1 - \varphi(k; \delta, p-1, n-p),
\end{aligned} \tag{56}$$

wobei $\varphi(k; \delta, p-1, n-p)$ den KVF-Wert der nichtzentralen f-Verteilung an Stelle k mit Nichtzentralitätsparameter δ sowie Freiheitsgradparametern $p-1$ und $n-p$ bezeichnet (vgl. Einheit (8) in *Allgemeines Lineares Modell*).

Damit der betrachtete Test ein Level-α_0-Test ist, muss bekanntlich gelten, dass

$$q_\phi(\beta) \le \alpha_0 \text{ für alle } \beta \in \Theta_0 \text{ mit } \Theta_0 = \mathbb{R} \times \{0_{p-1}\}. \tag{57}$$

Modellevaluation (5) Testumfangkontrolle

Beweis

Der Nichtzentralitätsparameter ist gegeben durch (siehe Einheit (8) in *Allgemeines Lineares Modell*)

$$\delta = \frac{1}{\sigma^2} c^{\mathrm{T}} \beta \left(c^{\mathrm{T}} (X^{\mathrm{T}} X)^{-1} c \right)^{-1} c^{\mathrm{T}} \beta \,. \tag{58}$$

Mit dem dazugehörigen c und unter der Nullhypothese, dass $\beta \in \Theta_0$, also

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \text{ und } \beta = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ 0_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \,, \tag{59}$$

folgt dann aber $\delta = 0$ und somit

$$q_\phi(\beta) = 1 - \varphi(k; p-1, n-p) \text{ für alle } \beta \in \Theta_0 \,, \tag{60}$$

wobei $\varphi(k; p-1, n-p)$ den Wert der KVF der f-Verteilung an der Stelle k mit Freiheitsgradparametern $p-1$ und $n-p$ bezeichnet (vgl. Einheit (8) in *Allgemeines Lineares Modell*). Der Testumfang des betrachteten Tests ergibt sich per Definition (siehe Einheit (11) in *Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz*) als

$$\alpha = \max_{\beta \in \Theta_0} q_\phi(\beta) = 1 - \varphi(k; p-1, n-p), \tag{61}$$

da $q_\phi(\beta)$ für $\beta \in \Theta_0$ nicht von μ_0 abhängt. Wir müssen also lediglich zeigen, dass die Wahl von k_{α_0} wie im Theorem garantiert, dass ϕ den Testumfang α_0 hat. Sei also $k := k_{\alpha_0}$. Dann gilt für alle $\beta \in \Theta_0$

$$q_\phi(\beta) = 1 - \varphi(\varphi^{-1}(1-\alpha_0; p-1, n-p); p-1, n-p) = 1 - (1-\alpha_0) = \alpha_0 \tag{62}$$

und damit ist alles gezeigt. $\square$

Modellevaluation (6) p-Wert

Nach Definition ist der p-Wert das kleinste Signifikanzlevel α_0, bei welchem man die Nullhypothese basierend auf einem vorliegenden Wert der Teststatistik ablehnen würde. Wir wollen einen vorliegenden Wert der F-Teststatistik hier mit f bezeichnen.

Bei $F = f$ würde H_0 für jedes α_0 mit $f \geq \psi^{-1}(1-\alpha_0; p-1, n-p)$ abgelehnt werden. Für ein solches α_0 gilt aber

$$\alpha_0 \geq \mathbb{P}(F \geq f), \tag{63}$$

denn

$$\begin{aligned}
f &\geq \psi^{-1}(1-\alpha_0; p-1, n-p) \\
\Leftrightarrow \psi(f; p-1, n-p) &\geq \psi(\psi^{-1}(1-\alpha_0; p-1, n-p), p-1, n-p) \\
\Leftrightarrow \psi(f; p-1, n-p) &\geq 1-\alpha_0 \\
\Leftrightarrow \mathbb{P}(F \leq f) &\geq 1-\alpha_0 \\
\Leftrightarrow \alpha_0 &\geq 1-\mathbb{P}(F \leq f) \\
\Leftrightarrow \alpha_0 &\geq \mathbb{P}(F \geq f)
\end{aligned} \tag{64}$$

Das kleinste $\alpha_0 \in [0,1]$ mit $\alpha_0 \geq \mathbb{P}(F \geq f)$ ist dann $\alpha_0 = \mathbb{P}(F \geq f)$, also folgt

$$\text{p-Wert} = \mathbb{P}(F \geq f) = 1 - \varphi(f; p-1, n-p). \tag{65}$$

Modellevaluation (6) p-Wert

Praktisches Vorgehen

- Man nimmt an, dass ein vorliegender Datensatz aus p Gruppendatensätzen besteht, wobei $y_{11}, ..., y_{1n_1}$, $y_{21}, ..., y_{2n_2}$, ..., $y_{p1}, ..., y_{pn_p}$ Realisationen von $y_{1j} \sim N(\mu_0, \sigma^2)$ und $y_{ij} \sim N(\mu_0 + \alpha_i, \sigma^2)$ für $i = 2, ..., p$ mit wahren, aber unbekannten Parametern $\mu_0, \alpha_i, i = 2, ..., p$ und $\sigma^2 > 0$ sind.
- Man möchte entscheiden ob $H_0 : \alpha_i = 0$ für alle $i = 2, ..., p$ eher zutrifft oder eher nicht.
- Man wählt ein Signifikanzniveau α_0 und bestimmt den zugehörigen Freiheitsgradparameter-abhängigen kritischen Wert k_{α_0}. Zum Beispiel gilt bei Wahl von $\alpha_0 := 0.05, p = 3, m = 12, i = 1, 2, 3$ und somit $n = 36$, dass $k_{\alpha_0} = \varphi^{-1}(1 - 0.05; 3 - 1, 36 - 3) \approx 3.28$ ist.
- Anhand der MSB und MSW berechnet man den realisierten Wert der F-Teststatistik, den wir hier mit f bezeichnen.
- Wenn f größer-gleich k_{α_0} ist, lehnt man die Nullhypothese ab, andernfalls nicht.
- Die oben entwickelte Theorie garantiert dann, dass man im Mittel in höchstens $\alpha_0 \cdot 100$ von 100 Fällen die Nullhypothese fälschlicherweise ablehnt.
- Schließlich ergibt sich der assoziierte p-Wert der realisiertern F-Teststatistik f zu

$$\text{p-Wert} = \mathbb{P}(F \geq f) = 1 - \varphi(f; p - 1, n - p) \tag{66}$$

Anwendungsbeispiel

```
# Daten einlesen
fname       = file.path(getwd(), "Daten", "Einfaktorielle_Varianzanalyse_Daten.csv")
D           = read.table(fname, sep = ",", header = TRUE)

# Datengruppen
y_1         = D$dBDI[D$Setting == "F2F"]                # BDI-Differenzwerte in der F2F-Gruppe
y_2         = D$dBDI[D$Setting == "ONL"]                # BDI-Differenzwerte in der ONL-Gruppe
y_3         = D$dBDI[D$Setting == "WLC"]                # BDI-Differenzwerte in der WLC-Gruppe

# Modellformulierung
p           = 3                                         # p = 3; drei Gruppen
m           = length(y_1)                               # m = 40; balancierters Design
n           = p*m                                       # n = 120; Datenvektordimension
y           = matrix(c(y_1, y_2, y_3), nrow = n)        # Datenvektor
Xt          = cbind(matrix(1, nrow = n, ncol = 1),      # Designmatrix vollständiges Modell
                    kronecker(diag(p), matrix(1, nrow = m, ncol = 1)))
X           = Xt[,-2]                                   # eliminiere zweite Spalte
X_0         = X[,1]                                     # Designmatrix reduziertes Modell

# Evaluation der F-Teststatistik
beta_hat    = solve(t(X) %*% X) %*% t(X) %*% y          # Betaparameterschätzer vollständiges Modell
beta_hat_0  = solve(t(X_0) %*% X_0) %*% t(X_0) %*% y    # Betaparameterschätzer reduziertes Modell
eps_hat     = y - X %*% beta_hat                        # Residuenvektor vollständiges Modell
eps_hat_0   = y - X_0 %*% beta_hat_0                    # Residuenvektor reduziertes Modell
SQT         = t(eps_hat_0) %*% eps_hat_0                # total sum of squares
SQW         = t(eps_hat)   %*% eps_hat                  # within sum of squares
SQB         = SQT - SQW                                 # between sum of squares
DFB         = p - 1                                     # between degrees of freedom
DFW         = n - p                                     # within degrees of freedom
MSB         = SQB/DFB                                   # mean between sum of squares
MSW         = SQW/DFW                                   # mean within sum of squares
Eff         = MSB/MSW                                   # F-Teststatistik
p           = 1 - pf(Eff, p-1, n-p)                     # p-Wert
```

Anwendungsbeispiel

```
# Ausgabe
cat(  "DFB :", DFB,
    "\nDFW :", DFW,
    "\nSQB :", SQB,
    "\nSQW :", SQW,
    "\nMSB :", MSB,
    "\nMSW :", MSW,
    "\nF   :", Eff,
    "\np   :", paste(p))
```

```
> DFB : 2
> DFW : 117
> SQB : 1009
> SQW : 2153
> MSB : 504
> MSW : 18.4
> F   : 27.4
> p   : 1.7192636203589e-10
```

Anwendungsbeispiel

```r
# Daten einlesen
fname       = file.path(getwd(), "Daten", "Einfaktorielle_Varianzanalyse_Daten.csv")
D           = read.table(fname, sep = ",", header = TRUE)

# Benutzung von R's aov Funktion und Ausgabe
res.aov = aov(D$dBDI ~ D$Setting, data = D)
summary(res.aov)
```

```
>              Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
> D$Setting     2   1009     504    27.4 1.7e-10 ***
> Residuals   117   2153      18
> ---
> Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Anwendungsszenario

Modellformulierung

Modellschätzung

Modellevaluation

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie das Anwendungsszenario einer einfaktoriellen Varianzanalyse (EVA).
2. Geben Sie die Definition des EVA-Modells in Erwartungswertparameterdarstellung wieder.
3. Geben Sie die strukturelle Form des EVA-Modells in Effektdarstellung wieder.
4. Erläutern Sie die Motivation für die Reparameterisierung des EVA-Modells.
5. Welche Bedeutung haben die Parameter $\mu_0, \alpha_2, ..., \alpha_p$ in der Effektparameterdarstellung des EVA-Modells?
6. Warum gibt es bei p Gruppen eines EVA-Szenarios nur die $p - 1$ Effektparameter $\alpha_2, ..., \alpha_p$?
7. Geben Sie die Designmatrixform des EVA-Modells in Effektdarstellung wieder.
8. Formulieren Sie die Designmatrix eines EVA-Modells mit $n_i = 3$ und $p = 2$.
9. Formulieren Sie die Designmatrix eines EVA-Modells mit $n_i = 2$ und $p = 5$.
10. Geben Sie das Theorem zur Betaparameterschätzung im EVA-Modell wieder.
11. Mit welchen deskriptiven Statistiken werden die Parameter $\mu_0, \alpha_2, ..., \alpha_p$ eines EVA-Modells geschätzt?

Selbstkontrollfragen

12. Geben Sie das Theorem zur Quadratsummenzerlegung bei einfaktorieller Varianzanalyse wieder.
13. Erläutern Sie die Begriffe total sum of squares, between sum of squares und within sum of squares.
14. Geben Sie die Definition des Effektstärkenmaßes η^2 an.
15. Wann nimmt das Effektstärkenmaß η^2 der EVA seinen Minimalwert an und wie lautet dieser?
16. Wann nimmt das Effektstärkenmaß η^2 der EVA seinen Maximalwert an und wie lautet dieser?
17. Geben Sie das Theorem zur F-Teststatistik der EVA wieder.
18. Erläutern Sie die Begriffe mean between sum of squares und mean within sum of squares.
19. Geben Sie das Theorem zum Zusammenhang von Effektstärkenmaß η^2 und F-Teststatistik der EVA wieder.
20. Geben Sie die Definition des EVA-F-Test wieder.
21. Erläutern sie die Null- und Alternativhypothesen des EVA-F-Tests.
22. Geben Sie das Theorem zur Testumfangkontrolle der EVA wieder.
23. Skizzieren Sie den Beweis zur Testumfangkontrolle der EVA.
24. Geben Sie den p-Wert zum F-Test der EVA wieder.

Georgii, Hans-Otto. 2009. *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. 4., überarb. und erw. Aufl. De-Gruyter-Lehrbuch. Berlin: de Gruyter.